

# Contrôle des systèmes non-linéaires

Pierre Rouchon

Mines ParisTech  
Centre Automatique et Systèmes  
Mathématiques et Systèmes

Tunis, Novembre 2010

# Table des matières

Motivations pratiques

Rappel sur les systèmes dynamiques (EDO)

Equations différentielles ordinaires et modélisation

Stabilité au sens de Lyapounov

Systèmes linéaires stationnaires

Les systèmes autonomes dans le plan

Schémas blocs (boucle ouverte, boucle fermée)

Systèmes non linéaires du 1<sup>er</sup> ordre et régulateur PI

Robustesse et systèmes lents/rapides

Robustesse paramétrique d'un point d'équilibre

Théorie des perturbations

Système lent/rapide avec rapide stable

Dynamiques négligées des capteurs et actionneurs

Cascade de régulateurs

Système lent/rapide avec rapide oscillant

Robots complètement actionnés

Le bras de robot

Le cas général

Commandabilité et stabilisation

Systèmes linéaires de dimension finie

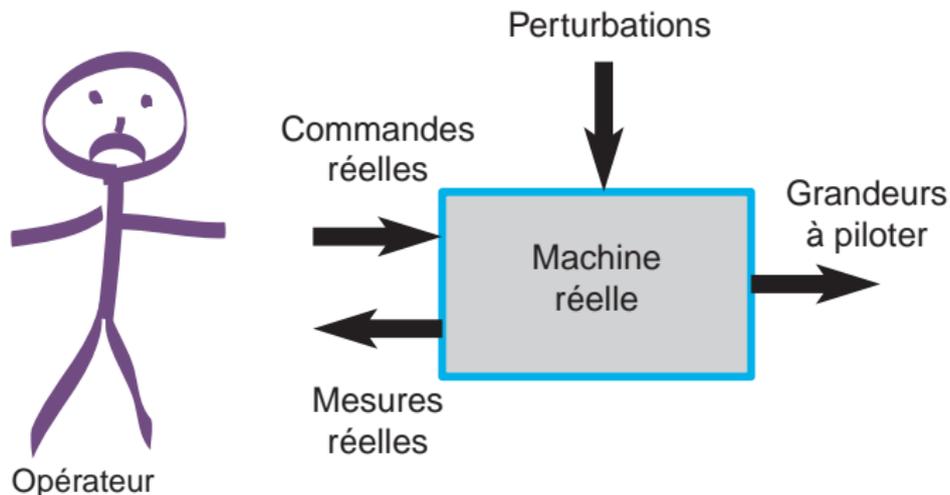
Linéarisation par bouclage statique

Systèmes différentiellement plats

Références utiles

## Pourquoi le contrôle ?

Très souvent, un système mécanique est difficile à piloter (comportement dynamique complexe, perturbations extérieures, mesures indirectes et bruitées , ...)

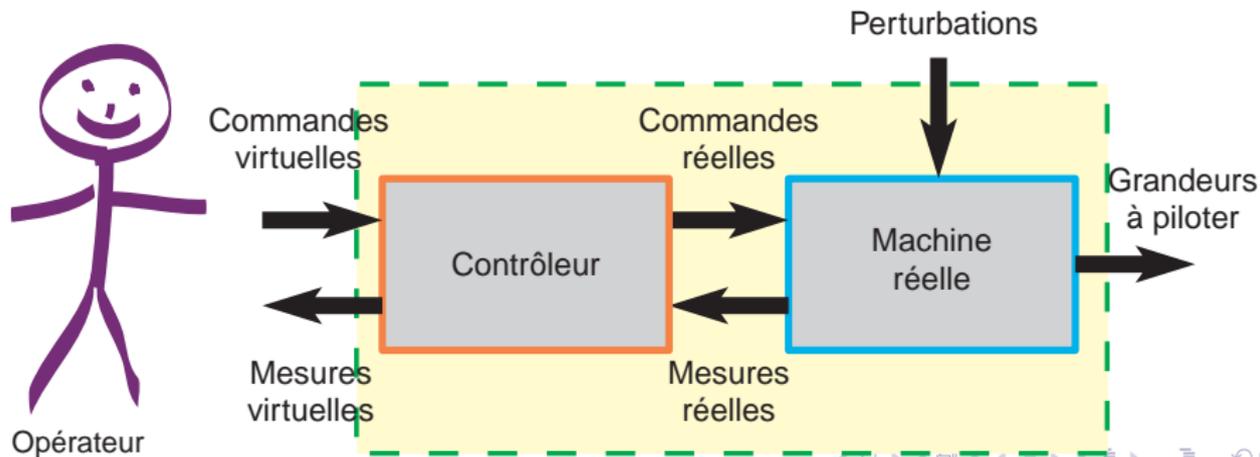


**Exemple :** il est très difficile piloter un avion à décollage vertical directement à partir des manettes des gaz (essayez sur la simulation !)

## But du contrôle :

Concevoir un *contrôleur* (qui sera matérialisé par un circuit électronique ou un programme informatique) transformant la machine réelle en une "machine virtuelle" facile à piloter et peu sensible aux perturbations.

Le contrôleur s'intercale entre la machine et l'opérateur. Il manipule en permanence les commandes réelles en utilisant les mesures réelles et les ordres de l'opérateur.



## La démarche :

- ▶ Modéliser la machine, c'est-à-dire décrire son comportement par des équations mathématiques  $\Rightarrow$  *on fait de la physique*
- ▶ Elaborer les équations du contrôleur à partir du modèle  $\Rightarrow$  *on fait de l'ingénierie mathématique avec des simulations numériques*
- ▶ Réaliser matériellement le contrôleur  $\Rightarrow$  *on fait de l'électronique/informatique temps-réel*

## Théorème de Cauchy et flot

Soit  $\frac{d}{dt}x = v(x, t)$  avec, pour chaque  $t$ ,  $x \mapsto v(x, t)$  localement lipchitzienne pour chaque  $x$ ,  $t \mapsto v(x, t)$  borné et intégrable. Alors pour tout  $x_0$  dans  $U$ , il existe  $a < 0 < b$  réels et une unique solution

$$\begin{aligned} \phi \cdot (x_0) : ]a, b[ &\longrightarrow U \\ t &\longrightarrow \phi_t(x_0) \end{aligned}$$

avec  $x(0) = x_0$  ( $\phi_0(x_0) = x_0$ ) :

$$\frac{d}{dt} (\phi_t(x))|_{t=\tau} = v(\phi_\tau(x), \tau) \quad \text{et} \quad \phi_0(x) = x$$

Simulation numérique par le schéma le plus simple dite d'Euler explicite :

$$x_{k+1} = x_k + hv(x_k, kh)$$

où  $h$  est le pas de discrétisation en temps (petit par rapport aux temps caractéristiques) et  $x_k$  est une approximation de  $x(kh)$ .

## Première variation : sensibilité et calcul des dérivées

Soit  $\{\phi_t\}$  le flot associé à  $\frac{d}{dt}x = v(x)$ . Sa dérivée, notée  $D_x\phi_t(x)$  (matrice  $n \times n$   $\left(\frac{\partial[\phi_t]_i}{\partial x_j}\right)$ ), est solution de

$$\frac{d}{dt} (D_x\phi_t(x))_{t=\tau} = D_x v(\phi_\tau(x)) D_x\phi_\tau(x)$$

avec comme condition initiale  $D_x\phi_0(x) = I_n$ . De plus  $D_x\phi_t(x) \cdot v(x) = v(\phi_t(x))$ .

Si  $v = v(x, t, \lambda)$  avec une dépendance en  $\lambda \in C^1$ , alors le flot de  $v(\cdot, \lambda)$ ,  $\{\phi_t^\lambda\}$  dépend aussi de  $\lambda$  de façon  $C^1$  :

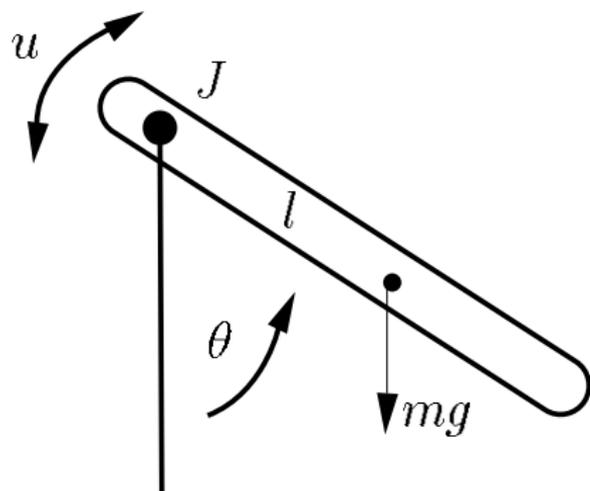
$$\frac{d}{dt} \left( D_\lambda\phi_t^\lambda(x) \right)_{t=\tau} = D_x v(\phi_\tau^\lambda(x), \lambda) D_\lambda\phi_\tau^\lambda(x) + D_\lambda v(\phi_\tau^\lambda(x), \lambda)$$

avec comme condition initiale  $D_\lambda\phi_0^\lambda(x) = 0$ .

Calcul direct avec l'opérateur  $\delta$  qui commute avec  $\frac{d}{dt}$  :

$$\frac{d}{dt} \delta x = D_x v \delta x + D_\lambda v \delta \lambda, \quad \delta x(0) = \delta x_0$$

## Le robot le plus simple (fichier matlab : BrasRobot.m)



Newton : équations différentielles ordinaires (EDO) :

$$J \frac{d^2}{dt^2} \theta = -mgl \sin(\theta) - F \left( \frac{d}{dt} \theta \right) + u$$

Oscillateur non-linéaire avec contrôle  $u$  et frottement  $F\left(\frac{d}{dt}\theta\right)$ .

L'équation du second ordre

$$J \frac{d^2}{dt^2} \theta = -mgl \sin(\theta) - F\left(\frac{d}{dt} \theta\right) + u$$

s'écrit sous la forme de deux équations du 1er ordre

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \theta &= \omega \\ \frac{d}{dt} \omega &= u/J - (mgl/J) \sin \theta - F(\omega)/J. \end{aligned}$$

On note  $x = (\theta, \omega)$  l'état (les conditions initiales),  $u$  le contrôle et  $p_1 = 1/J$ ,  $p_2 = mgl/J$  les paramètres et  $F$  le frottement.

**Exo:** Quelles sont les équations différentielles vérifiées par les petites variations  $\delta\theta(t)$  et  $\delta\omega(t)$  associées à de petites variations du contrôle  $\delta u(t)$  et de la masse  $\delta m$  ?

## Ensemble invariant et intégrale première

- ▶ Soit  $A$  un sous-ensemble de l'espace d'état  $U$ .  $A$  est dit **invariant** (resp. positivement invariant) par le flot  $\phi_t$ , si, pour tout  $t$  dans  $\mathbb{R}$  (resp. dans  $[0, +\infty[$ ),  $\phi_t(A)$  est inclus dans  $A$ .
- ▶ On appelle **intégrale première**, une fonction  $C^1$   $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\frac{d}{dt}[h(\phi_t(x))] = 0$  pour tout  $x$  dans  $U$  et pour tout  $t$ . Cette condition est équivalente à

$$D_x h(x) \cdot v(x, t) = 0$$

pour tout  $x$  dans  $U$

**Exo:** Pour  $\frac{d}{dt}\theta = \omega$ ,  $\frac{d}{dt}\omega = -(mgl/J)\sin\theta - F(\omega)/J$ , monter  $A_p = \{(\theta, \omega) \mid \omega^2/2 - (mgl/J)\cos(\theta) \leq p\}$  est positivement invariant dès que  $F(\omega)$  est du même signe que  $\omega$ .

## Stabilité au sens de Lyapounov

- ▶ Un point d'équilibre  $\bar{x}$  ( $v(\bar{x}) = 0$ ) de  $\frac{d}{dt}x = v(x)$  est **stable au sens de Lyapounov** si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  (dépendant de  $\varepsilon$  mais indépendant du temps  $t$ ) tel que, pour tout  $x$  vérifiant  $\|x - \bar{x}\| \leq \eta$ ,  $\|\phi_t(x) - \bar{x}\| \leq \varepsilon$  pour tout  $t > 0$ .
- ▶ Le point d'équilibre  $\bar{x}$  est **asymptotiquement stable au sens de Lyapounov** s'il est stable au sens de Lyapounov et si de plus, pour tout  $x$  suffisamment proche de  $\bar{x}$ ,  
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(x) = \bar{x}.$$

## 1<sup>ère</sup> méthode de Lyapounov, invariance de Lasalle

Soient  $\frac{d}{dt}x = v(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  (pour simplifier) et une fonction  $C^1$ ,  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty[$ , telle que :

- ▶ si  $x \in \mathbb{R}^n$  tend vers l'infini en norme,  $V(x)$  tend aussi vers l'infini ;
- ▶  $V$  décroît le long de toutes les trajectoires,  $\frac{dV}{dt} \leq 0$ .

Alors, toutes les trajectoires sont définies sur  $[0, +\infty[$  et convergent asymptotiquement vers le plus grand ensemble invariant contenu dans l'ensemble défini par  $D_x V \cdot v = 0$ .

En pratique on cherche les solutions du **système sur-déterminé** suivant :

$$\frac{d}{dt}x = v(x), \quad D_x V(x) \cdot v(x) = 0.$$

**Exo:** Pour  $\frac{d}{dt}\theta = \omega$ ,  $\frac{d}{dt}\omega = -(mgl/J) \sin \theta - F(\omega)/J$ , montrer que  $V(\theta, \omega) = \omega^2/2 - (mgl/J) \cos(\theta)$  est une fonction de Lyapounov. Calculer l'ensemble invariant de Lasalle.

## Lien avec le linéaire tangent (seconde méthode de Lyapounov)

Autour de l'équilibre  $\bar{x}$  le système linéarisé tangent est :

$$\frac{d(\Delta x)}{dt} = D_x v(\bar{x}) \Delta x \quad \text{où} \quad D_x v(\bar{x}) = \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right) \Big|_{1 \leq i, j \leq n} .$$

- ▶ Si les valeurs propres de  $Dv(\bar{x})$  sont toutes à **partie réelle strictement négative**, alors  $\bar{x}$  est un équilibre asymptotiquement stable au sens de Lyapounov.
- ▶ Si l'une des valeurs propres de  $Dv(\bar{x})$  possède une **partie réelle strictement positive** alors  $\bar{x}$  n'est pas un équilibre stable au sens de Lyapounov.

Les valeurs propres de  $Dv(\bar{x})$  sont appelées **exposants caractéristiques** ;  $\bar{x}$  est dit hyperbolique si tous ses exposants caractéristiques sont à partie réelle non nulle.

**Exo:** Calculer les points d'équilibre de  $\frac{d}{dt}\theta = \omega$ ,

$\frac{d}{dt}\omega = -(mgl/J) \sin \theta - F(\omega)/J$  ainsi que les exposants

caractéristiques associés. Que peut-on dire de leur stabilité ?

## Systèmes linéaires $\frac{d}{dt}x = Ax$

$$x(t) = \exp(tA)x(0), \quad \exp(tA) = \left[ I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \dots + \frac{t^k}{k!}A^k + \dots \right]$$

Propriété de l'exponentielle :

$$\exp(tA) \exp(sA) = \exp((t+s)A), \quad \frac{d}{dt}(\exp(tA)) = \exp(tA)A$$

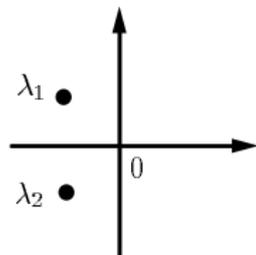
$$\exp(PAP^{-1}) = P \exp(A) P^{-1}$$

$$\exp(A) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left( I + \frac{A}{m} \right)^m, \quad \det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{tr}(A))$$

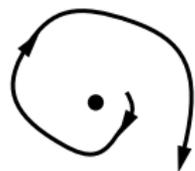
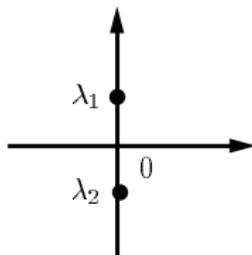
## Portrait de Phases de systèmes linéaires plans



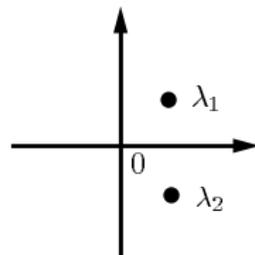
foyer stable

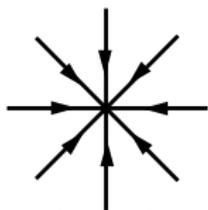


centre

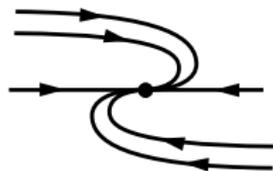


foyer instable

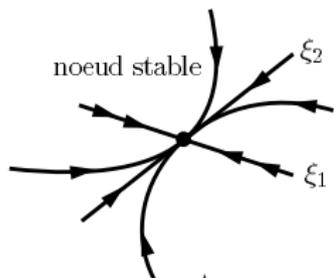




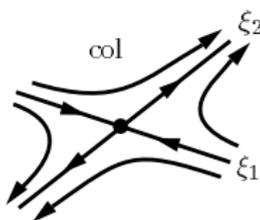
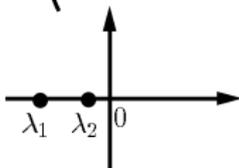
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda < 0$$



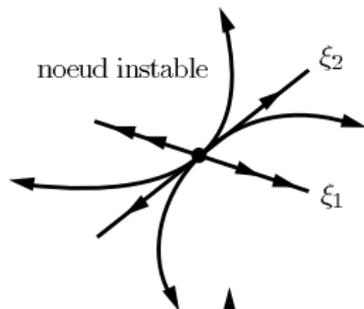
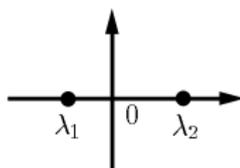
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda < 0$$



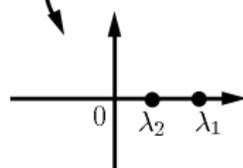
noeud stable



col



noeud instable



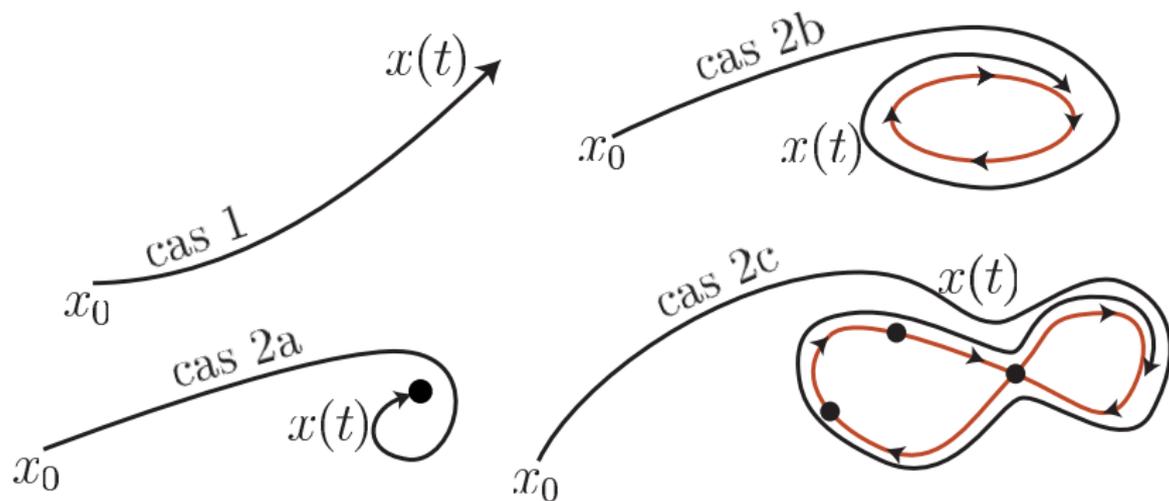
## Exo: dynamique de type gradient

Soit  $U : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^+$  une fonction  $C^2$  infinie à l'infini ( $\lim_{\|x\| \mapsto +\infty} U(x) = +\infty$ ). On considère la dynamique de type gradient,  $\frac{d}{dt}x = -\nabla U(x)$ , où  $\nabla U$  est le gradient de  $U$  dans  $\mathbb{R}^n$  euclidien, i.e.  $\nabla U$  est le vecteur colonne  $\left( \frac{\partial U}{\partial x_i} \right)_{i=1, \dots, n}$ .

- ▶ Montrer que  $U$  est un fonction de Lyapounov.
- ▶ En déduire que les trajectoires sont définies sur  $[0, +\infty[$  et convergent vers les points critiques de  $U$  (i.e. les zéros de  $\nabla U$ ).
- ▶ Soit  $\bar{x}$  un point critique de  $U$ , i.e. un équilibre. Montrer que les valeurs propres en  $\bar{x}$  sont toutes réelles. Discuter alors, en fonction de l'allure locale de  $U$  autour de  $\bar{x}$  de la stabilité de  $\bar{x}$ .
- ▶ Reprendre les trois questions précédentes en prenant sur  $\mathbb{R}^n$  une métrique qui n'est plus nécessairement euclidienne et donc définie par un champ de matrices symétriques définies positives  $x \mapsto G(x)$ , la dynamique dérivant du potentiel  $U$  étant alors  $\frac{d}{dt}x = -G^{-1}(x)\nabla U(x)$ .

## Comportements asymptotiques (thèse d'Henri Poincaré)

Les **quatre comportements asymptotiques** possibles pour une trajectoire d'un système dynamique autonome défini dans le plan :



## Théorème (Critère de Bendixon)

Soit

$$\mathbb{R}^2 \ni x \mapsto v(x) \in \mathbb{R}^2$$

une fonction continue et dérivable. On suppose que

$$\operatorname{div}(v)(x) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(x) < 0$$

pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^2$ .

Soit  $t \mapsto x(t)$  une solution de  $\frac{d}{dt}x = v(x)$  qui reste bornée pour les temps  $t$  positifs. Alors, sa limite quand  $t$  tend vers  $+\infty$  est un point d'équilibre, i.e., une solution  $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$  de  $v(\bar{x}) = 0$ .

## Théorème (existence d'orbite périodique)

Soit  $\mathbb{R}^2 \ni x = v(x) \in \mathbb{R}^2$  une fonction de classe  $C^1$ . On considère le système dynamique  $\frac{d}{dt}x = v(x)$ . On suppose qu'il existe dans le plan un ensemble compact  $\Omega$  tel que

- ▶ toute trajectoire ayant sa condition initiale dans  $\Omega$  reste dans  $\Omega$  pour les temps  $t > 0$ .
- ▶ soit  $\Omega$  ne contient aucun point d'équilibre, soit  $\omega$  contient un unique point d'équilibre dont toutes les valeurs propres sont à parties réelles strictement positives.

alors  $M$  contient une orbite périodique.

## Exo: Eco-système et modèle prédateur/proie

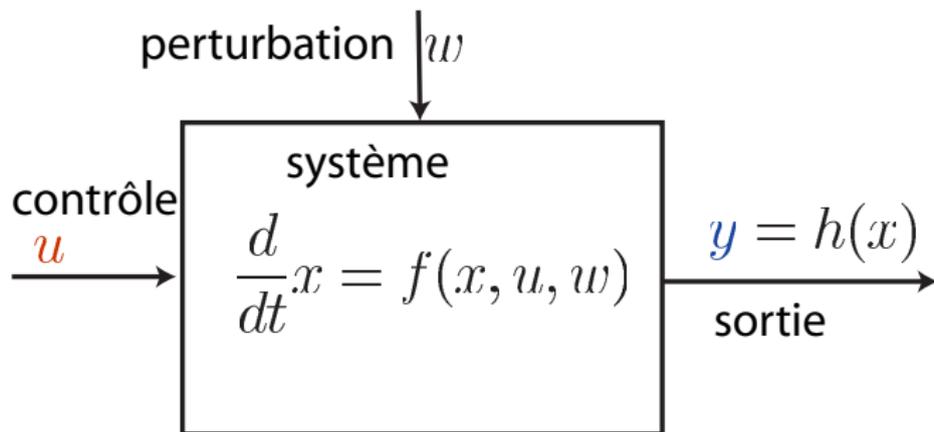
La population  $y \geq 0$ , des renards et celle des lapins  $x \geq 0$ , dévorée par les renards, vérifient :

$$\frac{dx}{dt} = (a - by - \alpha x)x, \quad \frac{dy}{dt} = (cx - d - \beta y)y$$

où  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ ,  $d > 0$ ,  $\alpha \geq 0$  et  $\beta \geq 0$  sont des paramètres positifs.

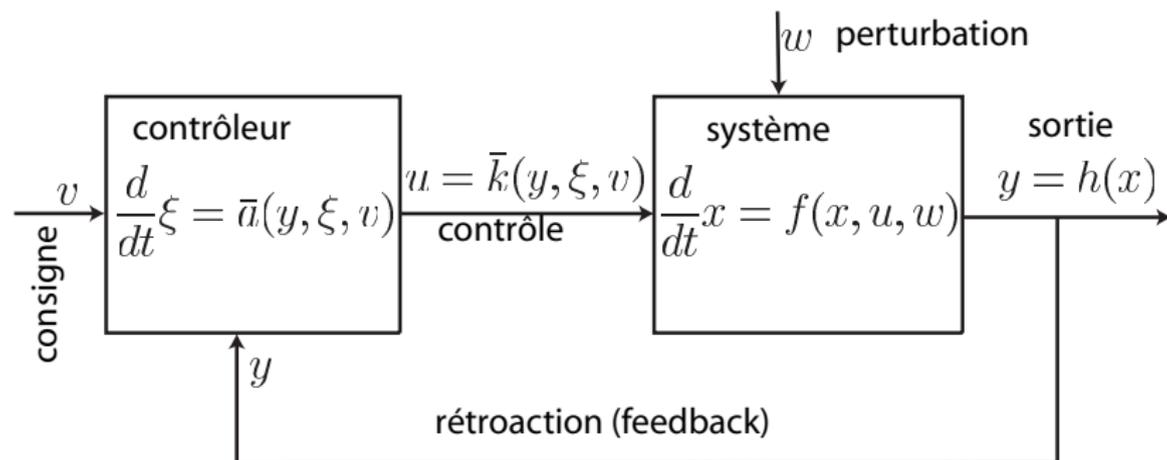
1. Quelles sont les hypothèses de modélisation ?
2. Quel est l'espace d'état du système ? Y a-t-il des ensembles invariants évidents ?
3. Montrer que les solutions sont définies sur  $[0, +\infty[$  (indication : considérer les deux isoclines, les états où le champ de vecteurs est parallèle à l'axe des  $x$  ou à l'axe des  $y$ ).
4. Discuter, en fonction des valeurs des paramètres le nombre et la stabilité des points d'équilibre.
5. Discuter l'allure du portrait de phases (faire des dessins).
6. On suppose ici  $\alpha = \beta = 0$ . Trouver une intégrale première (Intégrer l'équation différentielle  $dy/dx = \dots$ ). En déduire le portrait de phases.
7. Montrer que si au moins l'un des deux paramètres  $\alpha$  ou  $\beta$  est non nul, il n'existe pas d'orbite périodique (écrire les équations en échelle logarithmique ( $\log x$ ,  $\log y$ ), montrer que la divergence du champ de vecteurs en échelle log est strictement négative et conclure par Poincaré Bendixon).

## Schéma bloc de la boucle ouverte



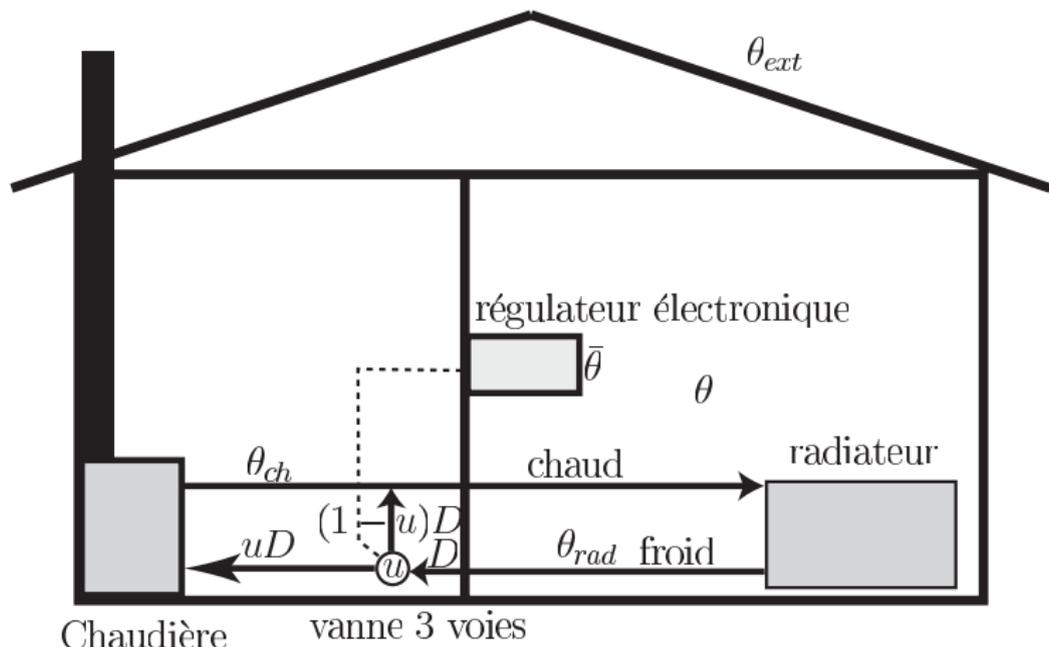
Simulations Scilab/Scicos : `Order1OpenLoop.cos`

## Schéma bloc de la boucle fermée



Simulations Scilab/Scicos : `Order1PI.cos`

## Exemple élémentaire



Régulateur **proportionnel intégral (PI)** de la **température**  $y = \theta$  à sa **consigne**  $v = \bar{\theta}$  avec une vanne  $u \in [0, 1]$ , le **contrôle**.

## Le régulateur Proportionnel-Intégral (PI)

- ▶ PI en temps discret :

$$u_{k+1} = S^{\text{at}}(K_p(\bar{\theta} - \theta_k) + I_k)$$

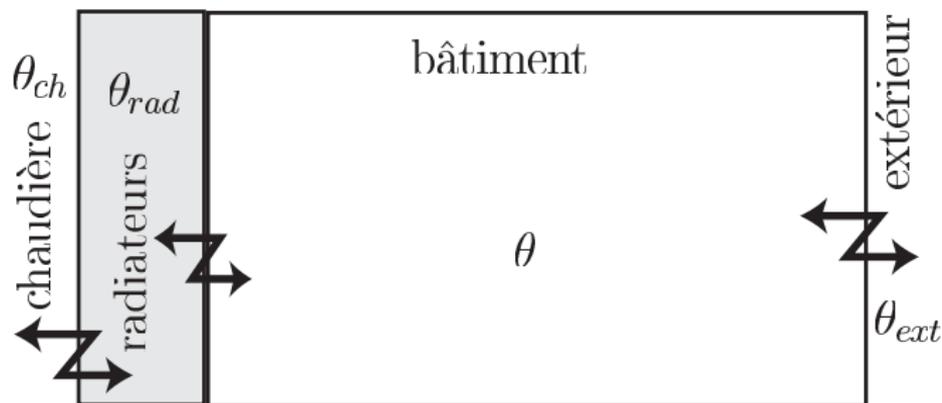
$$I_{k+1} = I_k + \Delta t [K_i(\bar{\theta} - \theta_k) + K_s(u_{k+1} - K_p(\bar{\theta} - \theta_k) - I_k)]$$

où  $S^{\text{at}}(x) = x$  si  $x \in [0, 1]$ ,  $S^{\text{at}}(x) = 0$  pour  $x < 0$  et  $S^{\text{at}}(x) = 1$

- ▶ PI en temps continu : avec  $\left. \frac{d}{dt} I \right|_k \approx \frac{I_{k+1} - I_k}{\Delta t}$ , on obtient la version continue :

$$u(t) = S^{\text{at}}(K_p(\bar{\theta} - \theta(t)) + I(t))$$

$$\frac{d}{dt} I(t) = K_i(\bar{\theta} - \theta(t)) + K_s(u(t) - K_p(\bar{\theta} - \theta(t)) - I(t)).$$



Modèle thermique **simplifié** fondé sur les **lois de conservation**.  
Un premier ordre non-linéaire :

$$MC_p \frac{d}{dt} \theta = \Lambda_{rad} (\theta_{rad} - \theta) + \Lambda_{ext} (\theta_{ext} - \theta)$$
$$u \Lambda (\theta_{ch} - \theta_{rad}) = \Lambda_{rad} (\theta_{rad} - \theta)$$

## Boucle ouverte et boucle fermée

Avec  $x = \theta$  et le contrôle  $u$ , la **perturbation**  $w = \theta_{ext}$  :

- ▶ Le système **en boucle ouverte**, un premier non-linéaire :

$$\frac{d}{dt}x = f(x, u, w), \quad x \in \mathbb{R}, \quad u \in [u^{\min}, u^{\max}]$$

avec comme seules hypothèses :  $\frac{\partial f}{\partial x} \leq 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial u} > 0$  et  $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$  avec  $\bar{u} \in [u^{\min}, u^{\max}]$ .

- ▶ Le système **en boucle fermée** un premier ordre avec le PI ( $K_p, K_i > 0$  et  $K_s K_p > K_i$ ) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x &= f(x, \mathbf{S}^{\text{at}} [K_p(\bar{x} - x) + I], w) \\ \frac{d}{dt}I &= K_i(\bar{x} - x) + K_s (\mathbf{S}^{\text{at}} [K_p(\bar{x} - x) + I] - K_p(\bar{x} - x) - I) \end{aligned}$$

## Le système en boucle fermée

Avec l'état en boucle ouverte  $\theta$  et celui du régulateur PI  $I$  (toutes les autres grandeurs sont supposées constantes, en particulier la perturbation  $w = \theta_{ext}$ ) on a (voir simulation **Scilab/Scicos**) :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\theta &= f(\theta, \mathcal{S}^{\text{at}} [K_p(\bar{\theta} - \theta) + I]) \\ \frac{d}{dt}I &= K_i(\bar{\theta} - \theta) + K_s (\mathcal{S}^{\text{at}} [K_p(\bar{\theta} - \theta) + I] - K_p(\bar{\theta} - \theta) - I)\end{aligned}$$

On note par  $x = (\theta, I) \in \mathbb{R}^2$  l'état en boucle fermée qui obéit à une EDO dans le plan :  $\frac{d}{dt}x = v(x)$ .

$x \mapsto v(x)$  est un **champ de vecteurs** (application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ , ici).

**Systèmes dynamiques** : étude des courbes  $t \mapsto x(t)$  définies par des équations différentielles ; **comportement asymptotique** quand  $t \mapsto +\infty$ .

## Stabilité locale

Pour  $(\theta, I)$  autour de  $(\bar{\theta}, \bar{I})$ , le système s'écrit (saturation non active)

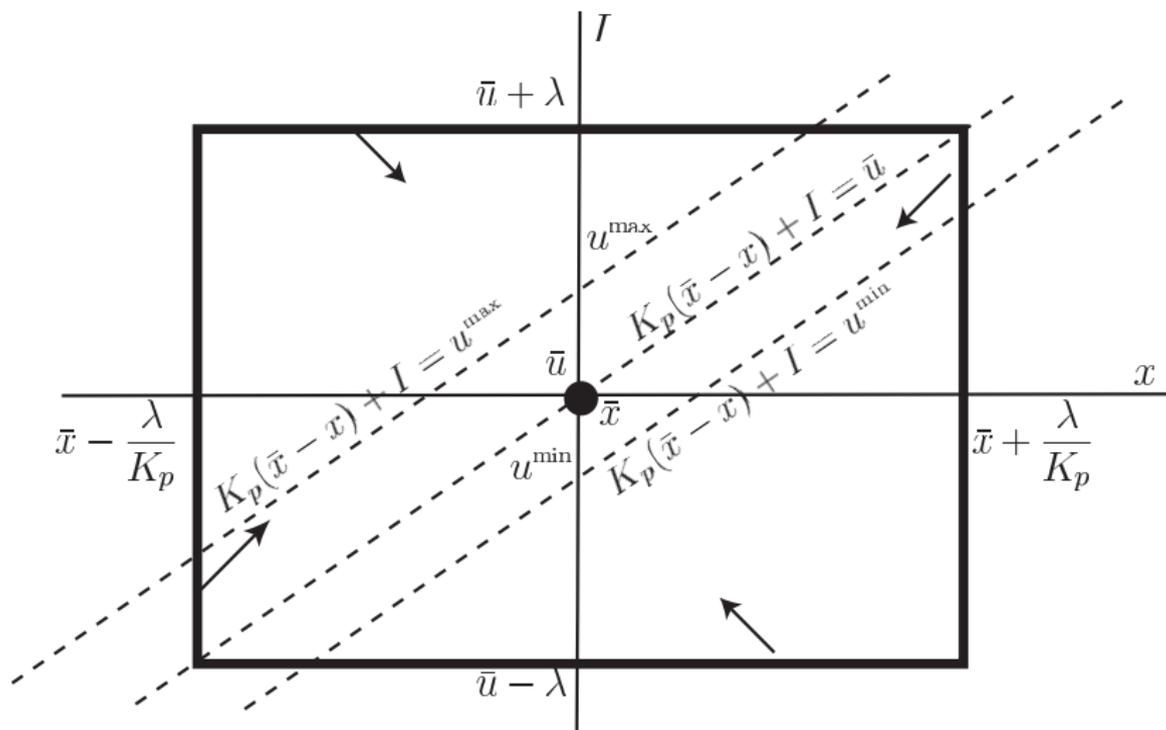
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\theta &= f(\theta, K_p(\bar{\theta} - \theta) + I) \\ \frac{d}{dt}I &= K_i(\bar{\theta} - \theta)\end{aligned}$$

Le calcul du linéaire tangent fait apparaître la matrice jacobienne suivante :

$$\begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f}{\partial \theta} \right|_{(\bar{\theta}, \bar{u})} - K_p \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(\bar{\theta}, \bar{u})} & \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(\bar{\theta}, \bar{u})} \\ -K_i & 0 \end{pmatrix}.$$

La trace de cette matrice  $2 \times 2$  est strictement négative car  $\left. \frac{\partial f}{\partial \theta} \right|_{(\bar{\theta}, \bar{u})} \leq 0$  et  $\left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(\bar{\theta}, \bar{u})} > 0$  par hypothèse et les gains  $K_p, K_i$  sont  $> 0$ . Son déterminant est strictement positif pour les mêmes raisons. Donc ses deux valeurs propres sont à parties réelles strictement négatives. Ainsi, pour tous  $K_p > 0$  et  $K_i > 0$ , le linéaire tangent est toujours stable.

## 1er ordre avec PI : trajectoires bornées ( $x \leftrightarrow \theta$ )



Le rectangle  $R_\lambda$  est **positivement invariant** car le champ de vecteurs définissant la dynamique **pointe vers l'intérieur** de  $R_\lambda$ .

## 1er ordre avec PI : stabilité asymptotique globale

- ▶ Le champ de vecteurs  $x = (\theta, I)$

$$\vec{v}(x) = \begin{pmatrix} f(\theta, \mathcal{S}^{\text{at}} [K_p(\bar{\theta} - \theta) + I]) \\ K_i(\bar{\theta} - \theta) + K_s (\mathcal{S}^{\text{at}} [K_p(\bar{\theta} - \theta) + I] - K_p(\bar{\theta} - \theta) - I) \end{pmatrix}$$

est à **divergence strictement négative**.

- ▶ S'il y avait une orbite périodique englobant un domaine  $\Omega$  d'aire non nulle, on aurait une contradiction car

$$0 > \int \int_{\Omega} \text{div} \vec{v} = \oint_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \vec{n} \, ds = 0$$

où  $\vec{n}$  est la normale extérieure à  $\Omega$  ( $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$  sur  $\partial\Omega$ , le bord du domaine  $\partial\Omega$  est l'orbite périodique).

- ▶ Unicité du point d'équilibre.

## Stabilité globale PI sur un 1er ordre

Soit le système du premier ordre non-linéaire  $\frac{d}{dt}x = f(x, u)$  avec,  $f$  continue, dérivable par morceau vérifiant  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, u) \leq 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial u}(x, u) > 0$  pour tout avec  $(x, u) \in \mathbb{R} \times [u^{\min}, u^{\max}]$ . Soit le régulateur PI avec anti-emballlement de consigne  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  :  
 $u = S^{\text{at}} [K_p(\bar{x} - x) + I]$ ,  $\frac{d}{dt}I = K_i(\bar{x} - x) + K_s(u - K_p(\bar{x} - x) - I)$  avec  $K_p, K_i > 0$ ,  $K_s K_p > K_i$  et  $S^{\text{at}}(v) = \max(u^{\min}, \min(u^{\max}, v))$ . Alors on a les deux cas suivants :

- ▶ **soit** il existe  $\bar{u} \in ]u^{\min}, u^{\max}[$  tel que  $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$  et alors l'équilibre  $(x, I) = (\bar{x}, \bar{u})$  du système bouclé est unique et globalement asymptotiquement stable au sens de Lyapounov
- ▶ **sinon : soit**  $\forall v \in [u^{\min}, u^{\max}]$ ,  $f(\bar{x}, v) < 0$  (resp  $> 0$ ) alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = u^{\max}$  (resp  $u^{\min}$ ) et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$  existe, est éventuellement infinie dans  $]-\infty, \bar{x}[$  (resp.  $], +\infty[$ ) ;  
**soit**  $f(\bar{x}, u^{\max}) = 0$  (resp.  $f(\bar{x}, u^{\min}) = 0$ ) alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = u^{\max}$  (resp.  $u^{\min}$ ) et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$  existe, est finie dans  $]-\infty, \bar{x}[$  (resp.  $], +\infty[$ )

Système dépendant d'un paramètre  $\varepsilon$  :

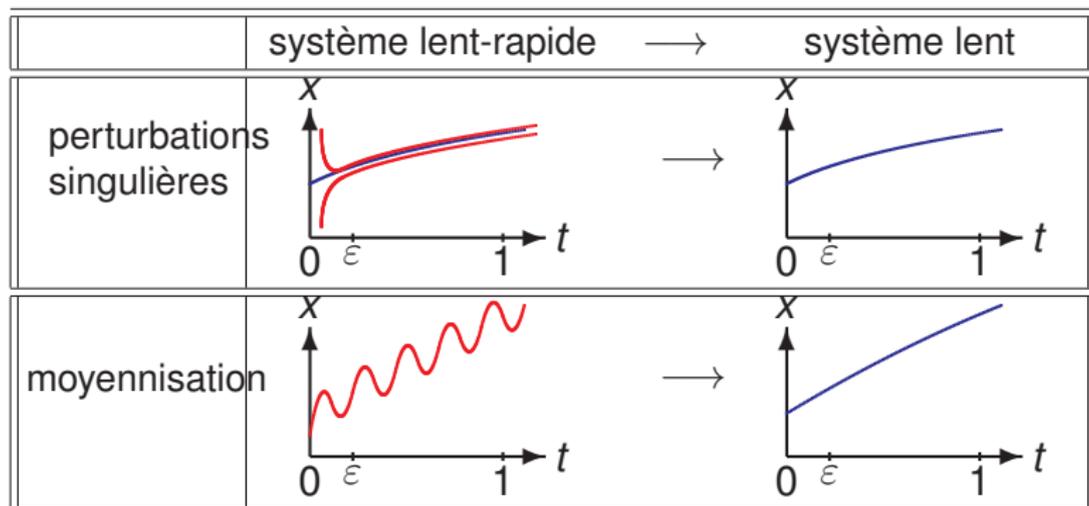
$$\frac{d}{dt}x = v(x, \varepsilon) \quad (\Sigma^\varepsilon)$$

**Hypothèses sur  $(\Sigma^0)$**  :  $\bar{x}_0$  équilibre,  $v(\bar{x}_0, 0) = 0$ , et les parties réelles des valeurs propres de  $\left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{(\bar{x}_0, 0)} \right]$  sont strictement négatives.

**Conclusion sur  $(\Sigma^\varepsilon)$**  : il existe  $\eta > 0$ , tel pour tout  $\varepsilon \in [-\eta, +\eta]$ , le système régulièrement perturbé  $(\Sigma^\varepsilon)$  admet un point d'équilibre  $\bar{x}(\varepsilon)$  qui dépend régulièrement de  $\varepsilon$  ( $v(\bar{x}(\varepsilon), \varepsilon) = 0$ ), qui est asymptotiquement stable (local) et  $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$ .

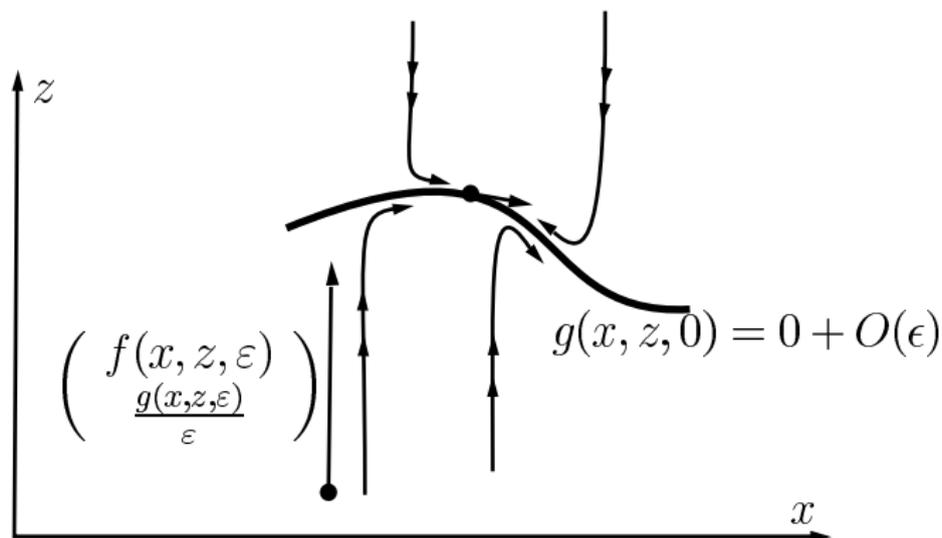
**Preuve** : fonction implicite, les valeurs propres d'une matrice dépendent continûment de ses coefficients.

# Théorie des perturbations



On **élimine les effets à court terme**,  $t \sim \varepsilon$ , qu'ils soient asymptotiquement stables ou oscillants, pour ne conserver que **les effets à long terme**,  $t \sim 1$  ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ).

## Forme normale de Tikhonov



$$(\Sigma^\epsilon) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, z, \epsilon) \\ \epsilon \frac{dz}{dt} = g(x, z, \epsilon) \end{cases}$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $z \in \mathbb{R}^p$ ,  
 $0 < \epsilon \ll 1$  un petit paramètre,  
 $f$  et  $g$  des fonctions régulières.

## Réduction de modèle

Pour  $0 < \varepsilon \ll 1$ , l'approximation de

$$(\Sigma^\varepsilon) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, z, \varepsilon) \\ \varepsilon \frac{dz}{dt} = g(x, z, \varepsilon) \end{cases} \quad \text{par} \quad (\Sigma^0) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, z, 0) \\ 0 = g(x, z, 0) \end{cases}$$

est justifiée dès que l'équation  $g(x, z, 0) = 0$  admet une solution,  $z = \rho(x)$ , avec  $\rho$  fonction régulière de  $x$  et dès que  $\frac{\partial g}{\partial z}(x, \rho(x), 0)$  est une matrice dont toutes les valeurs propres sont à parties réelles strictement négatives.

Le **modèle réduit** est alors  $\frac{d}{dt}x = f(x, \rho(x), 0)$

## Énoncé précis du théorème de Tikhonov

Soit le système **singulièrement perturbé** (forme dite standard),  
 $\frac{d}{dt}x = f(x, z, \varepsilon)$ ,  $\varepsilon \frac{d}{dt}z = g(x, z, \varepsilon)$  et supposons que

- ▶ l'équation  $g(x, z, 0) = 0$  admet une solution,  $z = \rho(x)$ , avec  $\rho$  fonction régulière de  $x$  et où  $\frac{\partial g}{\partial z}(x, \rho(x), 0)$  est une matrice dont toutes les valeurs propres sont à parties réelles strictement négatives
- ▶ le système réduit  $\frac{d}{dt}x = f(x, \rho(x), 0)$  admet une unique solution  $x^0(t)$  pour  $t \in [0, T]$ ,  $0 < T < +\infty$  avec la condition initiale  $x^0(0) = x_0$ .

Alors, pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment proche de 0, le système singulièrement perturbé admet une unique solution  $(x^\varepsilon(t), z^\varepsilon(t))$  sur  $[0, T]$  avec  $x^\varepsilon(0), z^\varepsilon(0) = (x_0, z_0)$  dès que  $z_0$  appartient l'intérieur du **bassin d'attraction** du point d'équilibre  $\rho(x_0)$  du **sous-système rapide**  $\varepsilon \frac{d}{dt}\zeta = g(x_0, \zeta, 0)$ . De plus on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} x^\varepsilon(t) = x^0(t) \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} z^\varepsilon(t) = z^0(t)$$

uniformément sur tout compact de  $]0, T]$ .

## Persistence de la stabilité

- ▶ On part de

$$(\Sigma^\varepsilon) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, z, \varepsilon) \\ \varepsilon \frac{dz}{dt} = g(x, z, \varepsilon) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{avec } g(x, \rho(x), 0) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial z}(x, \rho(x), 0) \text{ matrice stable} \\ \text{et } 0 < \varepsilon \ll 1. \end{array}$$

- ▶ On suppose en plus que système lent  $\frac{d}{dt}x = f(x, \rho(x), 0)$  admet un point d'équilibre  $\bar{x} : f(\bar{x}, \rho(\bar{x}), 0) = 0$  avec la matrice  $\left[ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} \right]_{(\bar{x}, \rho(\bar{x}), 0)}$  stable.
- ▶ Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$  assez proche de 0, le système perturbé  $(\Sigma^\varepsilon)$  admet un point d'équilibre proche de  $(\bar{x}, \rho(\bar{x}))$  et dont le linéaire tangent est asymptotiquement stable.

## Exo: cinétiques chimiques lentes et rapides

On considère un système fermé homogène comportant trois composants,  $A$ ,  $B$  et  $C$  et qui est le siège des réactions suivantes



où les constantes de vitesses sont  $k_A, k_B, \epsilon k > 0$  avec  $0 < \epsilon \ll 1$

1. Justifier le modèle dynamique  $\frac{d}{dt}x_A = k_Bx_B - k_Ax_A - \epsilon kx_Ax_B$ ,  $\frac{d}{dt}x_B = k_Ax_A - k_Bx_B - \epsilon kx_Ax_B$  et  $\frac{d}{dt}x_C = \epsilon kx_Ax_B$  où  $(x_A, x_B, x_C)$  sont les concentrations en  $A$ ,  $B$  et  $C$  dans le réacteur.
2. Montrer que  $\xi = \frac{x_A+x_B}{2} + x_C$  est un intégrale première. En déduire que les deux premières équations donnent les trajectoires.
3. On pose  $x = x_A + x_B$  et  $z = x_A - x_B$ . Montrer qu'avec  $(x, z)$  le système est sous la forme normale de Tikhonov. En déduire une approximation de la dynamique lente en  $x$ .
4. Quel est le régime asymptotique pour  $t$  grand de  $x_A$ ,  $x_B$  et  $x_C$  en fonction de la condition initiale  $(x_A^0, x_B^0, x_C^0)$ .

## Feedback sur un système à deux échelles de temps

- ▶ Rajoutons une commande  $u$  à  $(\Sigma^\varepsilon)$  :

$$(\Sigma^\varepsilon) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, z, u, \varepsilon) & \text{avec } g(x, \rho(x, u), u, 0) = 0 \\ & \text{et } \frac{\partial g}{\partial z}(x, \rho(x, u), u, 0) \text{ stable} \\ \varepsilon \frac{dz}{dt} = g(x, z, u, \varepsilon) & \text{Lent : } \frac{dx}{dt} = f(x, \rho(x, u), u, 0). \end{cases}$$

- ▶ Soit le feedback  $u = k(x)$  tel que le système lent bouclé

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \rho(x, k(x)), k(x), 0) = F(x), \text{ soit}$$

asymptotiquement stable autour du point d'équilibre  $(\bar{x}, \bar{u} = k(\bar{x}))$  :  $\frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x})$  stable.

- ▶ Alors pour tout  $\varepsilon > 0$  assez petit,  $(\Sigma^\varepsilon)$  avec  $u = k(x)$ , admet un équilibre asymptotiquement stable proche de  $(\bar{x}, \bar{z} = \rho(\bar{x}, \bar{u}))$  : **robustesse par rapport aux dynamiques négligées.**

## Robustesse et dynamiques négligées

Exemple du PI sur le premier ordre avec dynamiques rapides  
capteur/actionneur (voir simulation Scilab/Scicos) ( $(\theta^m, u^m)$ )

( $\varepsilon > 0$  petit) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}\theta(t) = f(\theta, u^m) \\ \frac{d}{dt}l(t) = K_i(\bar{\theta} - \theta^m(t)) + K_s(u(t) - K_p(\bar{\theta} - \theta^m(t)) - l(t)) \\ u(t) = S^{at}(K_p(\bar{\theta} - \theta^m(t)) + l(t)) \\ \varepsilon \frac{d}{dt}\theta^m(t) = \theta(t) - \theta^m(t) \\ \varepsilon \frac{d}{dt}u^m(t) = u(t) - u^m(t). \end{array} \right. \quad (1)$$

En posant  $x = (\theta, l)$  et  $z = (\theta^m, u^m)$ , on a

$$\frac{d}{dt}x = f(x, z, \varepsilon), \quad \varepsilon \frac{d}{dt}z = g(x, z, \varepsilon) \quad (\Sigma^\varepsilon)$$

alors que le modèle initial correspond en fait à  $\varepsilon = 0$

$$\frac{d}{dt}x = f(x, z, 0), \quad 0 = g(x, z, 0) \quad (\Sigma^0)$$

## Robustesse du PI

Le PI sur le premier ordre avec dynamiques capteur/actionneur

$$(\Sigma^\varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}\theta(t) = f(\theta, u^m) \\ \frac{d}{dt}l(t) = K_i(\bar{\theta} - \theta^m(t)) + K_s(u(t) - K_p(\bar{\theta} - \theta^m(t)) - l(t)) \\ \varepsilon \frac{d}{dt}\theta^m(t) = \theta(t) - \theta^m(t) \\ \varepsilon \frac{d}{dt}u^m(t) = u(t) - u^m(t) \\ u(t) = S^{at}(K_p(\bar{\theta} - \theta^m(t)) + l(t)). \end{array} \right.$$

est sous forme standard avec  $X = (\theta, l)$  et  $Z = (\theta^m, u^m)$ . La dynamique lente asymptotiquement stable. Donc l'équilibre en  $\theta = \bar{\theta}$  de  $(\Sigma^\varepsilon)$  est aussi stable si  $0 < \varepsilon \ll 1$ , c'est à dire si

$$\varepsilon K_p \frac{\partial f}{\partial u} \ll 1, \quad \varepsilon \frac{K_i}{K_p} \frac{\partial f}{\partial u} \ll 1, \quad \varepsilon K_s \ll 1$$

Il ne faut pas choisir  $K_p$ ,  $K_i$  et  $K_s$  trop grands pour ne pas exciter les dynamiques négligées.

## Cascade de deux régulateurs

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = v \\ \frac{d}{dt}v = f(x, v) + u \end{cases}$$

Les contraintes :

$f$  mal connue mais  $\|f\|_{\infty} < u^{\max}$

$u \in [-u^{\max}, u^{\max}]$

$v \in [-v^{\max}, v^{\max}]$  ( $u^{\max}, v^{\max} > 0$ ).

Un contrôle en deux temps (simulation **Scilab/Scicos**) :

1. un premier régulateur proportionnel (régulateur P),

$$u = \frac{\bar{v} - v}{\varepsilon}$$

avec  $0 < \varepsilon \ll 1$ , assure la convergence rapide de la vitesse  $v = \frac{d}{dt}x$  vers une consigne  $\bar{v}$  lentement variable.

2. un second régulateur PI ( $K_p, K_i > 0$ )

$$\bar{v} = K_p(\bar{x} - x) + I, \quad \frac{d}{dt}I = K_i(\bar{x} - x)$$

stabilise la position  $x$  à  $\bar{x}$  et fournit la consigne lentement variable  $\bar{v}$  au régulateur rapide précédent.

## Le système bouclé

$$(\Sigma^\varepsilon) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x = v \\ \varepsilon \frac{d}{dt}v = \varepsilon f(x, v) + K_p(\bar{x} - x) + I - v \\ \frac{d}{dt}I = K_i(\bar{x} - x) \end{cases}$$

est sous **forme standard** avec  $X = (x, I)$  et  $Z = v$  :

$$\frac{d}{dt}X = F(X, Z, \varepsilon), \quad \varepsilon \frac{d}{dt}Z = G(X, Z, \varepsilon)$$

La solution de  $G(X, Z, 0) = 0$  est  $v = \bar{v} = K_p(\bar{x} - x) + I$ . La **matrice**  $\frac{\partial G}{\partial Z} = -1$  **est stable**. Comme  $K_p, K_i > 0$ , le **système lent**

$$\frac{d}{dt}x = K_p(\bar{x} - x) + I, \quad \frac{d}{dt}I = K_i(\bar{x} - x)$$

**est stable**. Donc **l'équilibre**  $(x = \bar{x}, v = 0, \bar{I})$  de  $(\Sigma^\varepsilon)$  **est stable** pour  $\varepsilon > 0$  assez petit ( $\varepsilon K_p \ll 1$  et  $\varepsilon K_i \ll K_p$ ).

## Modèle de contrôle/Modèle de simulation

- ▶ On élabore le contrôle sur le modèle approché ( $\Sigma^0$ ), dit **modèle de contrôle** : le système bouclé ( $\Sigma^0$ ) est asymptotiquement stable. Le **modèle de simulation sera alors ( $\Sigma^\varepsilon$ )**
- ▶ Robustesse : pour  $\varepsilon > 0$  assez petit, le **système bouclé perturbé ( $\Sigma^\varepsilon$ )** est aussi asymptotiquement stable (théorie des perturbations régulières et singulières)
- ▶ **Marge de robustesse** : la **valeur critique  $\varepsilon^*$**  de  $\varepsilon$ , à partir de laquelle le système bouclé ( $\Sigma^\varepsilon$ ) devient instable. Dans le cas linéaire stationnaire, on a une idée de  $\varepsilon^*$  avec les **marges de gain et de retard** (marge de phase) obtenues via les **diagrammes de Nyquist et de Bode**. Dans les autres cas (linéaire instationnaire, non linéaire, ...) simulation en boucle fermée et/ou étude des bifurcations (difficile).

## Oscillation/relaxation et cascade de contrôleurs

A préparer : correction au début du prochain cours

**Exo:** On considère le système plan suivant

$$\epsilon \frac{d}{dt} x = y + x - \frac{x^3}{3} + u, \quad \frac{d}{dt} y = -\epsilon x$$

où  $0 < \epsilon \ll 1$  est un petit paramètre et  $u$  le contrôle.

1. Donner l'allure du portrait de phases en boucle ouverte avec  $u = 0$ .
2. On considère un premier contrôleur rapide  $u = -2x + v$  où  $v$  est un nouveau contrôle constant ou lentement variable ( $|\dot{v}| \sim \epsilon |v|$ )
  - 2.1 Donner l'allure du portrait de phases avec le contrôleur rapide où  $v$  est constant.
  - 2.2 Construire un contrôleur lent qui stabilise  $y$  en  $\bar{y}$  arbitraire.
  - 2.3 Estimer, à partir de simulations en boucle fermée des deux contrôleurs en cascade où  $\bar{y}$ , la valeur critique  $\epsilon^*$  de  $\epsilon$  à partir de laquelle le système bouclé devient instable (test de robustesse).

## Moyennisation à une fréquence ( $0 \leq \varepsilon \ll 1$ )

Considérons le système perturbé

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(x, t, \varepsilon)$$

avec  $f$  régulière et de période  $T$  par rapport à  $t$ . Il existe un changement de variables

$$x = z + \varepsilon w(z, t)$$

avec  $w$  de période  $T$  en  $t$ , tel que

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon \bar{f}(z) + \varepsilon^2 f_1(z, t, \varepsilon)$$

avec

$$\bar{f}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T f(z, t, 0) dt$$

et  $f_1$  régulière de période  $T$  en  $t$ .

Le système moyen (modèle réduit) est alors  $\frac{d}{dt}z = \bar{f}(z)$ . Ici  $z$  est proche de  $x$ .

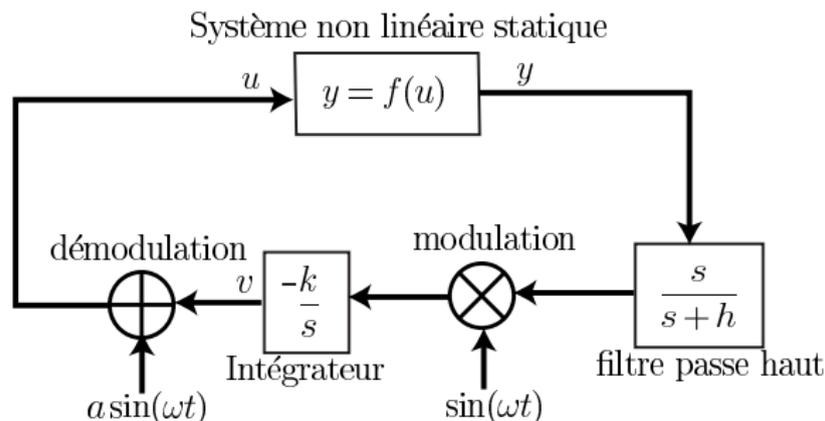
## Moyennisation à une fréquence (fin)

- ▶ Si  $x(t)$  et  $z(t)$  sont, respectivement, solutions du système perturbé et du système moyen, avec comme conditions initiales  $x_0$  et  $z_0$  telles que  $\|x_0 - z_0\| = O(\varepsilon)$ , alors  $\|x(t) - z(t)\| = O(\varepsilon)$  sur un intervalle de temps de l'ordre de  $1/\varepsilon$ .
- ▶ Si  $\bar{z}$  est un point fixe hyperbolique du système moyen, alors il existe  $\bar{\varepsilon} > 0$  tel que, pour tout  $\varepsilon \in ]0, \bar{\varepsilon}]$ , le système perturbé admette une unique orbite périodique hyperbolique  $\gamma_\varepsilon(t)$ , proche de  $\bar{z}$ ,  $\gamma_\varepsilon(t) = \bar{z} + O(\varepsilon)$ , qui peut être réduite à un point, et dont la stabilité est du même type que celle de  $\bar{z}$ <sup>1</sup>. En particulier, si  $\bar{z}$  est asymptotiquement stable, alors  $\gamma_\varepsilon$  est aussi asymptotiquement stable et l'approximation, à  $O(\varepsilon)$  près, des trajectoires du système perturbé par celles du système moyen devient valable pour  $t \in [0, +\infty[$ .

---

1. Le nombre des multiplicateurs caractéristiques de  $\gamma_\varepsilon$  de module strictement inférieur (resp. supérieur) à 1 est égal au nombre d'exposants caractéristiques de  $\bar{z}$  à partie réelle  $< 0$  (resp.  $> 0$ ).

## Recherche d'extremum (Extremum seeking)

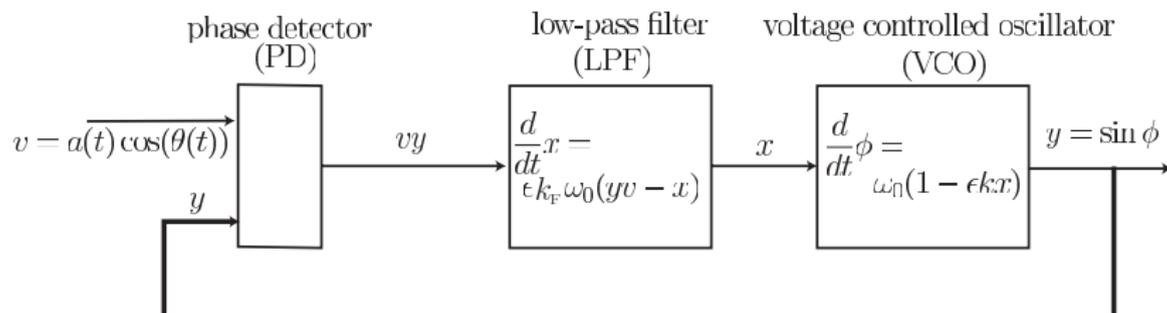


Les équations en boucle fermée sont (( $k, a, h, \omega$ ) paramètres  $> 0$ )

$$\frac{d}{dt}v = -k \sin(\omega t)(f(v+a \sin(\omega t))-\xi), \quad \frac{d}{dt}\xi = h(f(v+a \sin(\omega t))-\xi)$$

On suppose que  $f$  admet un minimum en  $u = \bar{u}$ , localement autour de  $\bar{u}$ ,  $f'' > 0$ . Alors localement, pour  $a$  assez petit,  $akf'' \ll \omega$  et  $h \ll \omega$  on "converge" vers le minimum de  $y$  (voir simulation [Scilab/Scicos](#))

## Boucle à verrouillage de phase (PLL)



La quantité  $\omega_0(1 - \epsilon k x)$  est une estimation filtrée de la fréquence  $\frac{d}{dt}\theta$  du signal d'entrée  $v$  qui peut être très fortement bruité et dont l'amplitude  $a$  n'est pas connue.

$$\frac{d}{dt}x = \epsilon k_f \omega_0 (v(t) \sin \phi - x), \quad \frac{d}{dt}\phi = \omega_0 (1 - \epsilon k x)$$

où  $\epsilon$  est un petit paramètre positif,  $k_f$  et  $k$  deux gains positifs. On pose  $v(t) = a \cos \theta$  avec  $\frac{d}{dt}\theta = \omega_0(1 + \epsilon p)$  où  $a > 0$  et  $p$  sont des paramètres inconnus mais constants (voir simulation [Scilab/Scicos](#)).

## PLL : la dynamique moyenne

Comme  $2 \cos \theta \sin \phi = \sin(\phi - \theta) + \sin(\phi + \theta)$ , avec  $\Delta = \phi - \theta$  et  $\sigma = \phi + \theta$ , le système

$$\frac{d}{dt}x = \epsilon k_f \omega_0 (a \cos \theta \sin \phi - x), \quad \frac{d}{dt}\phi = \omega_0(1 - \epsilon kx), \quad \frac{d}{dt}\theta = \omega_0(1 + \epsilon p)$$

devient dans l'échelle de temps  $\sigma$  ( $\frac{d}{dt}\sigma = \omega_0(2 + \epsilon(p - kx))$ )

$$\frac{d}{d\sigma}x = \epsilon k_f \frac{\frac{a}{2} \sin \Delta + \frac{a}{2} \sin \sigma - x}{2 + \epsilon(p - kx)}, \quad \frac{d}{d\sigma}\Delta = -\epsilon \frac{p + kx}{2 + \epsilon(p - kx)}.$$

Le système moyen est

$$\frac{d}{d\sigma}x = \epsilon k_f \frac{\frac{a}{2} \sin \Delta - x}{2 + \epsilon(p - kx)}, \quad \frac{d}{d\sigma}\Delta = -\epsilon \frac{p + kx}{2 + \epsilon(p - kx)}.$$

## PLL : stabilité asymptotique en moyenne

On néglige des termes d'ordre 2 en  $\epsilon$  et on prend comme système moyen :

$$\frac{d}{d\sigma}x = \frac{\epsilon k_f}{2} \left( \frac{a}{2} \sin \Delta - x \right), \quad \frac{d}{d\sigma}\Delta = -\frac{\epsilon}{2} (p + kx).$$

Ce système s'écrit aussi sous la forme d'une seule équation du second ordre avec  $\sigma/\varsigma = \epsilon\sqrt{k_f ka/8}$

$$\frac{d^2}{d\varsigma^2}\Delta = -\sqrt{\frac{2k_f}{ka}} \frac{d}{d\varsigma}\Delta - \left( \sin \Delta - \frac{2p}{ak} \right).$$

On choisit le **gain  $k$  assez grand** pour que  $\left| \frac{2p}{ak} \right| < 1$ . Ainsi on pose  $\sin \bar{\Delta} = \frac{2p}{ak}$  avec  $\bar{\Delta} \in ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Ce système admet donc **deux points d'équilibre** (angle défini à  $2\pi$  près) :

- ▶  $\Delta = \pi - \bar{\Delta} \pmod{2\pi}$  est un **col** (deux valeurs propres réelles de signes opposés)
- ▶  $\Delta = \bar{\Delta} \pmod{2\pi}$  est **localement asymptotiquement stable** (deux valeurs propres à partie réelle strictement négative).

## PLL : stabilité asymptotique en moyenne (fin)

$\frac{d^2}{d\varsigma^2} \Delta = -\sqrt{\frac{2k_f}{ka}} \frac{d}{d\varsigma} \Delta - \left( \sin \Delta - \frac{2p}{ak} \right)$  avec  $\Delta$  dans le cercle unité  $\mathbb{S}^1$  (système du premier ordre sur le cylindre  $(\Delta, \frac{d\Delta}{d\sigma}) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ ).

On reprend en partie les arguments utilisés pour le PI avec anti-emballlement :

- ▶ Le calcul de la divergence du champ de vecteur dans les coordonnées  $(\Delta, \Omega = \frac{d\Delta}{d\sigma})$  donne  $-\sqrt{\frac{2k_f}{ka}} < 0$ . Les trajectoires sont bornées dans le cylindre (la vitesse est bornée).
- ▶ Ainsi, il ne peut y avoir au plus qu'une seule orbite périodique et de plus elle fait un tour autour du cylindre.
- ▶ Pour  $k$  et  $k_f$  assez grands, on a deux points d'équilibre et on n'a pas d'orbite périodique (bifurcation globale fondée sur l'espace rentrant du col  $\pi - \bar{\Delta}$ ).

En résumé : pour  $k$  et  $k_f$  assez grands  $\Delta = \phi - \theta$  converge vers une constante (le point  $\bar{\Delta}$ ) : c'est le **verrouillage de phase**.

## Pendule inversé de Kapitza

**Exo:** Le mouvement d'un pendule ponctuel de longueur  $l$  et dont la hauteur du point de suspension oscille selon  $a \cos(\Omega t)$  avec une amplitude  $0 < a \ll l$  et une fréquence  $\Omega \gg \sqrt{\frac{g}{l}}$  est donnée par

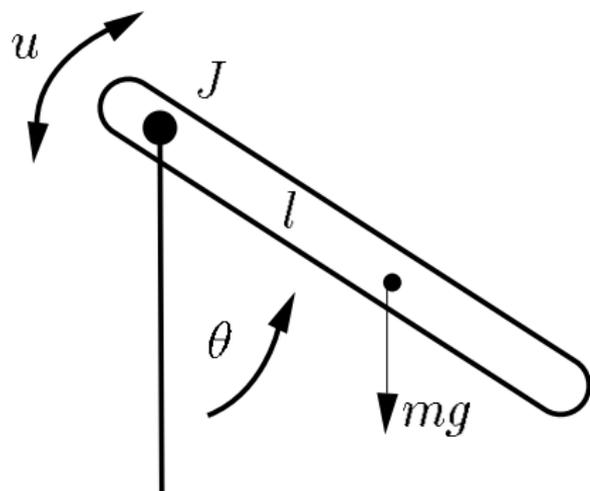
$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g+a\Omega^2 \cos(\Omega t)}{l} \sin \theta$  où  $\theta$  est l'angle par rapport à la verticale descendante.

1. On pose  $\sigma = \Omega t$ . Montrer que  $\frac{d^2\theta}{d\sigma^2} = -(\epsilon + \eta \cos \sigma) \sin \theta$  avec  $\epsilon = \frac{g}{l\Omega^2}$  et  $\eta = \frac{a}{l}$ .
2. Avec comme variables d'état  $(x_1, x_2)$  définies par  $\theta = x_1$  et  $\frac{d\theta}{d\sigma} = \eta(x_2 - \sin \sigma \sin x_1)$ , montrer que  $\frac{dx_1}{d\sigma} = \eta(x_2 - \sin \sigma \sin x_1)$  et  $\frac{dx_2}{d\sigma} = -\left(\eta \sin^2 \sigma \cos x_1 + \frac{\epsilon}{\eta}\right) \sin x_1 + \eta x_2 \sin \sigma \cos x_1$ .
3. En déduire les équations moyennes lorsque  $\eta \ll 1$  et  $\epsilon \ll \eta$

$$\frac{dx_1}{d\sigma} = \eta x_2, \quad \frac{dx_2}{d\sigma} = -\left(\frac{\eta}{2} \cos x_1 + \frac{\epsilon}{\eta}\right) \sin x_1$$

4. On considère le système moyen. Quelle est la valeur critique  $\epsilon^*$  de  $\epsilon$  à partir de laquelle l'équilibre  $\theta = x_1 = \pi$  devient stable ? Déterminer, en fonction de la position de  $\epsilon$  par rapport à  $\epsilon^*$ , le nombre de points d'équilibre et leur stabilité.

## Le robot le plus simple (fichier matlab : BrasRobot.m)



**Newton** : équations différentielles ordinaires (EDO) :

$$J \frac{d^2}{dt^2} \theta = -mgl \sin(\theta) - F\left(\frac{d}{dt} \theta\right) + u$$

Oscillateur non-linéaire avec **contrôle**  $u$  et **frottement**  $F\left(\frac{d}{dt} \theta\right)$  mal connu.

L'équation du **second ordre** ( $F = 0$  pour simplifier ici).

$$J \frac{d^2}{dt^2} \theta = -mgl \sin(\theta) + u$$

s'écrit sous la forme de **deux équations du 1er ordre**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \theta &= \omega \\ \frac{d}{dt} \omega &= u/J - (mgl/J) \sin \theta. \end{aligned}$$

On note  $x = (\theta, \omega)$  **l'état** (les conditions initiales),  $u$  le contrôle et  $p_1 = 1/J$ ,  $p_2 = mgl/J$  les paramètres.

- ▶ **Boucle ouverte et feedforward.** La **génération de trajectoires** consiste à trouver une **trajectoire de référence**  $t \mapsto (\theta_r(t), \omega_r(t), u_r(t))$  partant d'un état  $(\theta_i, \omega_i)$  en  $t = 0$  et arrivant en  $t = T$  à l'état final  $(\theta_f, \omega_f)$ , ces deux états étant fixés par avance. Il s'agit du problème de base de la **commandabilité**.
- ▶ **Boucle fermée et feedback.** Etant donné que tout modèle est approximatif (les paramètres  $J$  et  $m$  et  $l$  sont connus avec une certaine précision), il convient de corriger la commande de référence  $u_r(t)$  en temps réel de façon à compenser les **écarts à la trajectoire de référence**,  $\theta - \theta_r$  et  $\omega - \omega_r$ , qui peuvent apparaître. Il s'agit d'un problème de **suivi de trajectoire** ("tracking" en anglais) et **stabilisation** par **rétro-action (feedback)**. Une démarche très naturelle consiste à corriger la commande de référence  $u_r(t)$  par des termes du type  $\theta - \theta_r(t)$  et  $\omega - \omega_r(t)$ .

## Génération et suivi pour le robot le plus simple

**Méthode du couple calculé** : on fixe  $t \mapsto \theta_r(t)$  où  $(\theta(0), \frac{d}{dt}\theta(0))$  et  $(\theta(T), \frac{d}{dt}\theta(T))$  sont fixés par l'état initial  $x^0$  et l'état final  $x^T$ . Alors une trajectoire allant de  $x^0$  à  $x^T$  est :

$$[0, T] \ni t \mapsto (\theta_r(t), \omega_r = \frac{d}{dt}\theta_r(t), u_r(t) = \frac{\frac{d^2}{dt^2}\theta_r(t) + p_2 \sin(\theta_r(t))}{p_1}).$$

### Le feedback linéarisant

$$u = \left[ p_2 \sin \theta + \frac{d^2}{dt^2}\theta_r - 2\xi\Omega_0(\omega - \omega_r(t)) - \Omega_0^2(\theta - \theta_r(t)) \right] / p_1$$

assure une dynamique de suivi linéaire et asymptotiquement stable

$$\frac{d}{dt}(\theta - \theta_r) = \omega - \omega_r, \quad \frac{d}{dt}(\omega - \omega_r) = -2\xi\Omega_0(\omega - \omega_r(t)) - \Omega_0^2(\theta - \theta_r(t))$$

avec  $\xi > 0$  autour de 1 (facteur d'amortissement) et  $\Omega_0 > 0$  (la bande passante).

## Robustesse (erreur de paramètres et dynamiques négligées)

- ▶ En fait le vrai modèle est

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\theta &= \omega \\ \frac{d}{dt}\omega &= (p_1 + \eta_1)u_{vrai} - (p_2 + \eta_2)\sin\theta + \eta \\ \frac{d}{dt}u_{vrai} &= (u - u_{vrai})/\epsilon.\end{aligned}$$

où  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  et  $\eta$  correspondent aux **erreurs de paramètres** et  $0 < \epsilon\sqrt{p_2} \ll 1$  à la dynamique du moteur représentée par un premier ordre ayant une **petite constante de temps**  $\epsilon$ .

- ▶ Le système en boucle fermée doit être peu sensible à ces erreurs. Ce qui **limite les gains** pour le feedback linéarisant précédent :

$$\epsilon\Omega_0 \ll 1.$$

## Recalage et adaptation par un terme intégral

- ▶ On remarque un **biais statique** sur  $\theta$  par exemple pour  $\eta \neq 0$ .
- ▶ On rajoute un **effet intégral** qui peut être vu comme une adaptation de la consigne  $\theta_r$  dans le feedback linéarisant et que l'on remplace par  $\theta_r + I$ , où le terme intégral **I** est un décalage qui vérifie la **dynamique lente** suivante

$$\frac{d}{dt} I = \frac{\theta_r - \theta}{T_I}$$

avec une constante de temps  $T_I$  grande devant celle du suivi :  
 $T_I \Omega_0 \ll 1$ .

- ▶ Ainsi on a

$$u = \left[ p_2 \sin \theta + \frac{d^2}{dt^2} \theta_r - 2\xi \Omega_0 (\omega - \omega_r(t)) - \Omega_0^2 (\theta - (\theta_r + I)(t)) \right] / p_1.$$

- ▶ Prise en **compte des contraintes**  $u \in [u^{\min}, u^{\max}]$  via **l'anti-emballement** heuristique suivant

$$u = S^{\text{at}} \left( \left[ p_2 \sin \theta + \frac{d^2}{dt^2} \theta_r - 2\xi \Omega_0 (\omega - \omega_r(t)) - \Omega_0^2 (\theta - (\theta_r + I)(t)) \right] / p_1 \right)$$

et en limitant le **terme intégral** par  $I = \max \left( -\frac{\pi}{2}, \min \left( \frac{\pi}{2}, I \right) \right)$ .

## Les notions fondamentales illustrées par le bras robot

- ▶ Méthode du couple calculé et linéarisation par bouclage
- ▶ Stabilité asymptotique au sens de Lyapounov
- ▶ Robustesse par rapport au paramètre et point d'équilibre hyperbolique
- ▶ Robustesse par rapport aux dynamiques négligées et théorie des perturbations (systèmes lents/rapides)

## Les équations de Lagrange : cas autonome

Systèmes mécaniques décrits par des variables de configuration  $q = (q_1, \dots, q_n)$  admet le Lagrangien suivant

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, J(q)\dot{q} \rangle - U(q)$$

où  $J(q)$  est une matrice  $n \times n$  symétrique définie positive. Les équations d'Euler Lagrange sont (cas conservatif autonome)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q}.$$

Si on note  $[L] = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q}$  alors pour un déplacement infinitésimal  $\delta q$ ,  $[L]\delta q$  est le travail des forces extérieures non prises en compte dans le potentiel  $U$ .

Exemple : le pendule  $n = 1$ ,  $q_1 = \theta$ ,  $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$ .

## Les équations de Lagrange : cas non autonome

On a cette fois un Lagrangien  $L$  qui dépend du temps :

$$L(q, \dot{q}, t)$$

Les équations d'Euler Lagrange restent les mêmes :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q}.$$

**Exo:** Montrer que le pendule de longueur variable  $l$  obéit à

$$\frac{d}{dt} \left( l^2 \frac{d}{dt} \theta \right) = -gl \sin \theta$$

où  $l$  peut être considéré comme un contrôle ici.

## Les équations de Lagrange : avec un contrôle $u$

Les équations d'Euler-Lagrange restent les mêmes avec un terme supplémentaire

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q} + M(q)u.$$

où  $M(q)$  est une matrice  $n \times m$  et  $u = (u_1, \dots, u_m)$ .

Exemple : le robot le plus simple  $n = 1$ ,  $q_1 = \theta$ ,

$$\frac{d^2}{dt^2} \theta = -\frac{g}{l} \sin \theta + u.$$

## Les robots complètement actionnés sont commandables

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q} + M(q)u.$$

avec  $n = \dim q = \dim u$  et  $M(q)$  inversible.

Méthode du couple calculé : on impose  $q = y(t)$  avec  $t \mapsto y(t)$  une fonction  $C^2$  du temps pour en déduire une trajectoire  $(q, \frac{d}{dt}q, u) = (y, \frac{d}{dt}y, v)$  où  $v$  est donné par

$$v = M(y)^{-1} \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} \right)_{(y, \frac{d}{dt}y, \frac{d^2}{dt^2}y)}.$$

Les états de départ et d'arrivée correspondent à la valeur de  $(y, \frac{d}{dt}y)$  au départ et à l'arrivée.

## Le suivi de trajectoire

Avec  $y_r(t)$  et la méthode du couple calculé on a une trajectoire de référence  $(q_r, \frac{d}{dt}q_r, u_r)$ . Avec la forme développée

$$J(q)\frac{d^2}{dt^2}q + C\left(q, \frac{d}{dt}q\right)\frac{d}{dt}q + g(q) = M(q)u$$

le suivi de trajectoire s'écrit

$$u = [M(q)]^{-1} \left( J(q)\Gamma + C\left(q, \frac{d}{dt}q\right)\frac{d}{dt}q + g(q) \right)$$

où

$$\frac{d^2}{dt^2}q = \Gamma = \frac{d^2}{dt^2}q_r - 2\xi\Omega_0 \left( \frac{d}{dt}q - \frac{d}{dt}q_r \right) - \Omega_0^2(q - q_r)$$

Les paramètres  $\xi, \Omega_0 > 0$  correspondent à la fréquence de coupure et au facteur amortissement de la dynamique du second ordre de l'erreur  $e = q - y_r$  :  $\frac{d^2}{dt^2}e = -2\xi\Omega_0\frac{d}{dt}e - \Omega_0^2e$ .

## La balançoire

**Exo:** La déviation  $\theta$  par rapport à la verticale descendante d'un pendule ponctuel de longueur variable  $l$  obéit à  $\frac{d}{dt} (l^2 \frac{d}{dt} \theta) = -gl \sin \theta$ . On pose  $l = L(1 + \epsilon u)$  avec  $\epsilon \ll 1$  et  $u$  le contrôle.

1. Justifier l'approximation  $\frac{d}{dt} \theta = \frac{p_\theta}{L^2} (1 - 2\epsilon u)$ ,  $\frac{d}{dt} p_\theta = -gL(1 + \epsilon u)\theta$ .  
Monter qu'avec  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \frac{p_\theta}{L\sqrt{gL}}$  et  $\omega = \sqrt{g/L}$ , on a

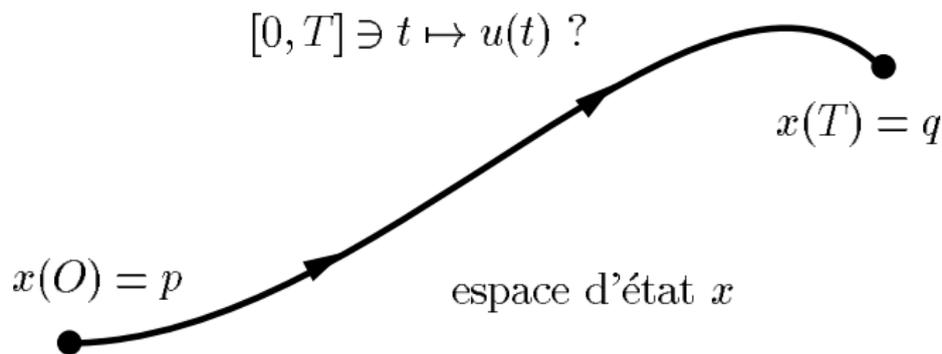
$$\frac{d}{dt} x_1 = \omega x_2 (1 - 2\epsilon u), \quad \frac{d}{dt} x_2 = -\omega (1 + \epsilon u) x_1$$

2. On passe en coordonnée polaire  $x_1 = r \cos \phi$ ,  $x_2 = r \sin \phi$ . Montrer que

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{\frac{3\epsilon\omega}{2} ur \sin(2\phi)}{-\omega + \frac{\epsilon\omega}{2} u(1 - 3\cos(2\phi))}$$

3. On considère le feedback  $u = \frac{-4}{3} v \sin(2\phi)$  avec  $v$  lentement variable.  
En déduire, à l'ordre 1 en  $\epsilon$ , qu'en moyenne on a :  $\frac{dr}{d\phi} = \epsilon vr$ .
4. Proposer alors contrôle  $v$  allant d'oscillations de petite amplitude  $r = a > 0$  vers des oscillations de plus grande amplitude  $r = b > a > 0$ .  
Donner aussi un contrôle lorsque  $0 < b < a$  et tester le feedback  $u = v \sin(2\phi)$  vous même sur une balançoire.

## Génération de trajectoires et commandabilité.



Problème **difficile** en général car lié à l'intégration de

$$\frac{d}{dt}x = f(x, u(t)).$$

## Commandabilité

$$\frac{d}{dt}x = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m$$

On appelle **trajectoire** toute fonction régulière  $I \ni t \mapsto (x(t), u(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  qui satisfait identiquement sur un intervalle d'intérieur non vide  $I$  de  $\mathbb{R}$  ces équations.

Le système est dit **commandable en temps  $T > 0$** , si et seulement si, pour  $p, q \in \mathbb{R}^n$ , il existe une loi horaire  $[0, T] \ni t \mapsto u(t) \in \mathbb{R}^m$ , dite commande en **boucle ouverte**, qui amène le système de l'état  $x(0) = p$  à l'état  $x(T) = q$ , c'est-à-dire telle que la solution du problème de Cauchy :

$$\frac{d}{dt}x = f(x, u(t)) \quad \text{pour } t \in [0, T], \quad x(0) = p$$

vérifie  $x(T) = q$ . Le système est dit **commandable** lorsqu'il est commandable pour au moins un temps  $T > 0$ .

## Obstructions

De façon schématique, il y a deux types d'obstruction à la commandabilité :

- ▶ le système comporte un **sous-système indépendant du contrôle  $u$** . Exemple type avec  $\xi = x_1 - x_2$  :

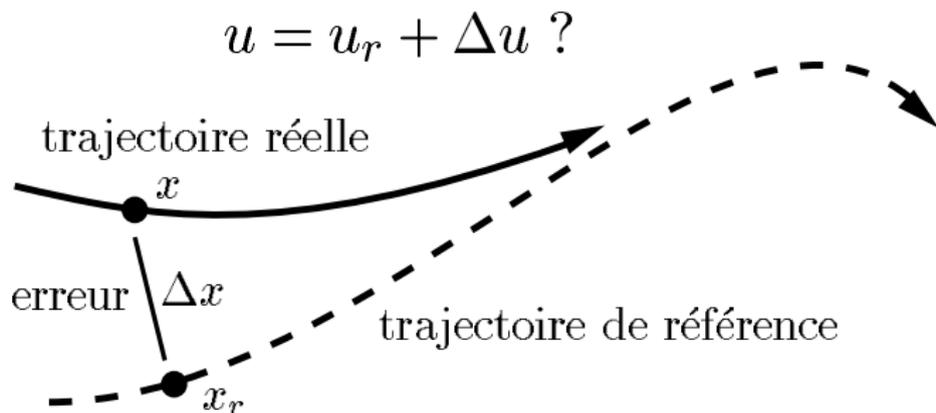
$$\frac{d^2}{dt^2}x_1 = u - x_1, \quad \frac{d^2}{dt^2}x_2 = u - x_2$$

- ▶ La **dérivée** de certaines variables est de **signe constant** (typiquement non linéaire). Exemple type :

$$\frac{d}{dt}x_1 = x_2, \quad \frac{d}{dt}x_2 = u^2 \geq 0$$

On ne dispose pas à l'heure actuelle de **caractérisation en terme fini** de la commandabilité même si les composantes de  $f$  sont des fonctions polynômiales de  $x$  et  $u$  (pb de **décidabilité**).

## Le suivi de trajectoire et stabilisation.



Pour  $\frac{d}{dt}x = f(x, u)$ , calculer  $\Delta u$ ,  $u = u_r + \Delta u$ , pour que  $\Delta x = x - x_r$  tende vers 0.

**Exo:** Faire le schéma bloc correspondant au suivi de trajectoires en séparant bien les termes de **feedback** et ceux de **feedforward**

## Critère de Kalman

Dans le cas linéaire stationnaire  $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$ , “on sait tout”. La contrôlabilité en temps  $T > 0$  équivaut à la contrôlabilité en un temps arbitrairement court et on a :

### Théorème (critère de Kalman)

*Le système  $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$  est commandable si, et seulement si, la matrice de commandabilité  $\mathcal{C} = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$  est de rang  $n = \dim(x)$ .*

Pour abrégé, on dit souvent que la paire  $(A, B)$  est **commandable**, pour dire que le rang de la **matrice de commandabilité**  $\mathcal{C}$  est maximum.

## Equivalence par feedback statique régulier

- ▶ On dira que les systèmes  $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$  et  $\frac{d}{dt}z = Fz + Gv$  ( $x, z \in \mathbb{R}^n$ ,  $u, v \in \mathbb{R}^m$ ) sont **équivalents** si, et seulement si, existent  $M$ , une matrice inversible  $n \times n$ ,  $E$ , une matrice  $m \times n$  et  $N$ , une matrice inversible  $m \times m$ , telles que le changement de variable  $z = Mx$  et  $v = Ex + Nu$  dans les équations  $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$ , donne  $\frac{d}{dt}z = Fz + Gv$ .
- ▶ Géométrie associé au **groupe de transformations**  
$$\begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ E & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$$
- ▶ **Intérêt** : préserve la commandabilité ; si on sait aller d'un état à un autre avec  $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$ , on sait aussi aller d'un état à un autre pour tout système équivalent  $\frac{d}{dt}z = Fz + Gv$ .

## Théorème (forme de Brunovsky, cas mono-entrée)

Si  $(B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ , la matrice de commandabilité de  $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$ , est de rang  $n = \dim(x)$  ( $B$  est de rang 1 ici) alors il existe un changement d'état  $z = Mx$  ( $M$  matrice inversible  $n \times n$ ) et un bouclage statique régulier  $v = Ex + Nu$  ( $N$  réel non nul), tels que les équations du système dans les variables  $(z, v)$  admettent la forme suivante :

$$\frac{d}{dt}z_1 = z_2, \dots, \frac{d}{dt}z_{n-1} = z_n, \frac{d}{dt}z_n = v$$

avec comme état  $z = (z_1, \dots, z_n)$ .

Ainsi on a  $\frac{d^n}{dt^n}z_1 = v = y^{(n)}$  où  $y = z_1 = Cx$ , avec  $C$  bien choisie, est la **sortie dite de Brunovsky**.

## Calcul de la sortie de Brunovsky pour $n = 1, 2$ .

- ▶  $\frac{d}{dt}x = ax + bu$  : avec  $z = x$  et  $v = ax + bu$  on a  $\frac{d}{dt}z = v$ .
- ▶  $n = 2$  : l'élimination de  $u$  entre les deux équations ( $b_1 \neq 0$ )

$$\frac{d}{dt}x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1u$$

$$\frac{d}{dt}x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2u$$

montre que  $\frac{d}{dt} \left( x_2 - \frac{b_2}{b_1} x_1 \right)$  est une fonction de  $x$  uniquement. On se ramène à  $n = 1$  avec comme contrôle  $x_1$  et comme état  $y = x_2 - \frac{b_2}{b_1} x_1$ , la **sortie de Brunovsky**.

## Calcul de la sortie de Brunovsky pour $n = 3$ .

- L'élimination de  $u$  des trois équations ( $b_1 \neq 0$ )

$$\frac{d}{dt}x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1u$$

$$\frac{d}{dt}x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2u$$

$$\frac{d}{dt}x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3u$$

montre que  $\frac{d}{dt} \left( x_2 - \frac{b_2}{b_1} x_1 \right)$  et  $\frac{d}{dt} \left( x_3 - \frac{b_3}{b_1} x_1 \right)$  ne dépendent que de  $x$  (pas de  $u$ ).

- On se ramène à  $n = 2$  avec comme contrôle  $x_1$  et comme état  $\left( x_2 - \frac{b_2}{b_1} x_1, x_3 - \frac{b_3}{b_1} x_1 \right) = (X_2, X_3)$ .
- On élimine  $x_1$  des deux équations  $\frac{d}{dt} X_2 = \dots, \frac{d}{dt} X_3 = \dots$ , pour obtenir une seule équation différentielle où la variable qui est dérivée est la sortie de Brunovsky.

## Planification sur la forme normale

On part de  $y^{(n)} = v$ . L'état initial  $p$  correspond à  $(y(0), \dots, y^{(n-1)}(0))$ , et l'état finale  $q$  à  $(y(T), \dots, y^{(n-1)}(T))$ . Sur  $]0, T[$ ,  $y$  est libre pourvu que  $t \mapsto y(t)$  soit une fonction  $KC^n$ . Il suffit de prendre  $v = y^{(n)}(t)$ .

Il existe **une infinité de fonctions**  $t \mapsto y(t)$  qui satisfont ces conditions. Par exemple on peut prendre un polynôme de degré  $\geq 2n - 1$ .

Si on suppose que  $p$  et  $q$  sont des états stationnaires alors  $y^{(i)}(0, T) = 0$  pour  $i = 1, \dots, n - 1$ . En notant  $a = y(0)$  et  $b = y(T)$ , on peut prendre

$$y(t) = \begin{cases} a, & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{(T-t)^n}{t^n + (T-t)^n} a + \frac{(t)^n}{t^n + (T-t)^n} b, & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ b, & \text{si } T \leq t \end{cases}$$

## Planification dans les coordonnées de départ

Les données sont un système commandable  $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$ ,  
 $T, p = x(0)$  et  $q = x(T)$ .

On passe par la forme de Brunovsky  $y^{(n)} = v$ , avec

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad u = N^{-1}y^{(n)} - N^{-1}EM^{-1} \begin{pmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

On en déduit la condition initiale et finale pour  $(y, \dots, y^{(n-1)})$ ; on choisit la courbe  $KC^n, t \mapsto y(t)$ ; on en déduit alors  $t \mapsto u(t)$  comme une combinaison linéaire de  $(y(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$ . On a même en prime la trajectoire sur  $t \mapsto x(t)$  sans intégrer l'équation  $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu(t)$ .

## Suivi de trajectoires

La planification de trajectoire donne **une trajectoire de référence**  $t \mapsto (x_r, u_r)$  qui vérifie les équations  $\frac{d}{dt}x_r = Ax_r + Bu_r$ . Si on note  $\Delta x = x - x_r$  et  $\Delta u = u - u_r$ , on a comme dynamique d'erreur

$$\frac{d}{dt}\Delta x = A \Delta x + B \Delta u.$$

On cherche un **feedback**  $\Delta u = K\Delta x$  tel que le système bouclé  $\frac{d}{dt}\Delta x = (A + BK)\Delta x$  soit asymptotiquement stable.

### Théorème (placement de pôles)

*Si la paire  $(A, B)$  est commandable alors, pour toute matrice  $n \times n$  réelle  $F$ , il existe une matrice  $m \times n$ ,  $K$  (non nécessairement unique si  $\dim(u) = m > 1$ ), telle que le spectre de  $A + BK$  coïncide avec celui de  $F$ .*

## Placement de pôles sur la forme normale

Il suffit de résoudre le placement de pôle sur la forme de Brunovsky  $(z, v)$  (le retour aux variables  $(x, u)$  : un changement de variables sur  $z = Mx$  (ce qui ne change pas le spectre) et un feedback supplémentaire  $v = Ex + Nu$  pour avoir  $u$ ).

On part de  $y^{(n)} = v$  et on note  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  le spectre d'une matrice réelle de dimension  $n$ . Notons  $s_k$  les **fonctions symétriques des  $\lambda_i$**  (des quantités réelles donc) homogènes de degré  $k$ ,

$$\prod_{k=1}^n (X - \lambda_k) = X^n - s_1 X^{n-1} + s_2 X^{n-2} + \dots + (-1)^n s_n$$

Alors, dès que les  $\lambda_k$  sont à partie réelle strictement négative, le bouclage

$$v = s_1 y^{(n-1)} - s_2 y^{(n-2)} + \dots + (-1)^{n-1} s_n y$$

assure la stabilité de  $y^{(n)} = v$ .

## Théorème (forme de Brunovsky, cas multi-entrées)

Si  $(B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ , la matrice de commandabilité de  $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$ , est de rang  $n = \dim(x)$  et si  $B$  est de rang  $m = \dim(u)$ , alors il existe un changement d'état  $z = Mx$  ( $M$  matrice inversible  $n \times n$ ) et un bouclage statique régulier  $u = Ex + Nv$  ( $N$  matrice inversible  $m \times m$ ), tels que les équations du système dans les variables  $(z, v)$  admettent la forme suivante (écriture sous la forme de  $m$  équations différentielles d'ordre  $\geq 1$ ) :

$$y_1^{(\alpha_1)} = v_1, \quad \dots, \quad y_m^{(\alpha_m)} = v_m$$

avec comme état

$z = (y_1, y_1^{(1)}, \dots, y_1^{(\alpha_1-1)}, \dots, y_m, y_m^{(1)}, \dots, y_m^{(\alpha_m-1)})$ , les  $\alpha_i$  étant des entiers positifs ( $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = n$ ).

Les  $m$  quantités  $y$ , qui sont des combinaisons linéaires de l'état  $x$ , sont appelées **sorties de Brunovsky**.

## La linéarisation par bouclage statique

Pour  $\frac{d}{dt}x = f(x, u)$ , trouver le **changement de variable** sur  $x$  et le **bouclage statique régulier** sur  $u$

$$\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} z = \phi(x) \\ v = k(x, u) \end{bmatrix}$$

tels que les équations deviennent linéaires (système linéaire commandable, voir transparent précédent) :

$$\frac{d}{dt}z = Az + Bv$$

On parle alors de **système linéarisable par bouclage statique**.  
Pour les **robots complètement actionnés**, on se ramène par simple bouclage (sans changement d'état) à la forme de Brunovsky

$$\frac{d^2}{dt^2}q = v.$$

## Un résultat simple sur la linéarisation par bouclage statique

Les deux propositions suivantes sont équivalentes

1. Le système étendu :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = f(x, u) \\ \frac{d}{dt}u = v \end{cases}$$

est linéarisable par bouclage statique ( $v$  est ici la commande)

2. Le système :

$$\frac{d}{dt}x = f(x, u)$$

est linéarisable par bouclage statique.

## Système affine en contrôle

$$\frac{d}{dt}x = f(x) + g_1(x)u_1 + \dots + g_m(x)u_m$$

où  $f$  et les  $g_i$  sont des **champs de vecteurs**.

On définit une suite de **distributions**, suite croissante pour l'inclusion, par la récurrence suivante :

$$E_0 = \{g_1, \dots, g_m\}, \quad E_i = \{E_{i-1}, [f, E_{i-1}]\} \quad i \geq 1$$

où  $[f, g]$  est le **crochet de Lie** de deux champs de vecteurs. **Ces distributions et le crochet sont invariants par changement de coordonnées.**

Le crochet  $[f, g]$  correspond à  $Df.g - Dg.f$  :

$$\sum_j \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} g_j - \frac{\partial g_i}{\partial x_j} f_j \right).$$

Calcul différentiel intrinsèque, i.e., indépendant du choix des coordonnées locales  $x$ .

## La CNS de linéarisation par bouclage statique

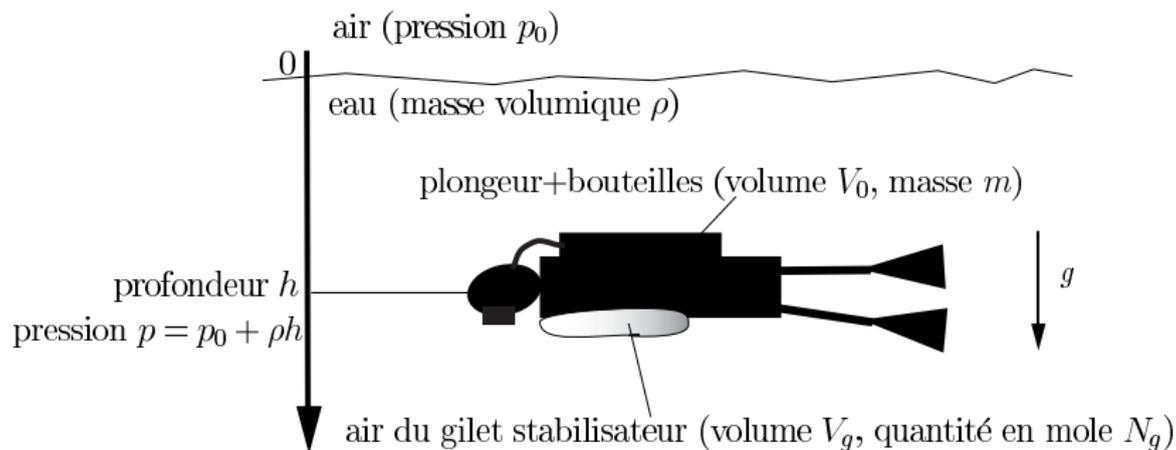
Théorème de Jakubczyk et Respondek (1980) : autour de l'équilibre  $(x, u) = (0, 0)$ , le système

$$\frac{d}{dt}x = f(x) + g_1(x)u_1 + \dots + g_m(x)u_m$$

est linéarisable par bouclage statique régulier si, et seulement si, les distributions  $E_i, i = 1, \dots, n - 1$  définies ci-dessus sont **involutives**, c'est à dire stables par le crochet de Lie, de rang constant autour de  $x = 0$  et le rang de  $E_{n-1}$  vaut  $n$ , la dimension de  $x$ .

## Gilet stabilisateur en plongée autonome

### Exo:



La dynamique verticale d'un plongeur équipé d'un gilet stabilisateur piloté par le débit de gaz  $u$  est

$$m \frac{d^2}{dt^2} h = \left( m - \rho \left( V_0 + \frac{N_g R \theta}{p_0 + \rho h} \right) \right) g - C \frac{d}{dt} h, \quad \frac{d}{dt} N_g = u$$

où  $C \geq 0$  est le coefficient de frottement avec l'eau,  $R$  la constante des gaz parfaits et  $\theta$  la température.

## Gilet stabilisateur en plongée autonome (fin)

### Exo:

1. Discuter ce modèle et expliquer l'origine des équations.  
Pourquoi est-il important d'avoir  $m > \rho V_0$  (ce que l'on supposera dans toute la suite) ?
2. On suppose ici  $u = 0$ . Quels sont les points d'équilibre et étudier leur stabilité.
3. Montrer qu'avec le bouclage  $u = (v - N_g)/\epsilon$  avec  $\epsilon > 0$  petit on se ramène à un second ordre avec comme commande  $v$ .  
Comment choisir  $\epsilon$  en fonction des paramètres.
4. Calculer une commande en boucle ouverte  $[0, T] \ni t \mapsto v_r(t)$  et une trajectoire de référence  $[0, T] \ni t \mapsto h_r(t)$  qui assurent la transition entre les deux d'équilibres  $h = a > 0$  et  $h = b > 0$ .  
Discuter en fonction de  $T$  la faisabilité de cette trajectoire de référence sachant que  $v$  doit rester positif.
5. Donner le bouclage non-linéaire d'état qui met le système sous la forme  $\frac{d^2}{dt^2} h = w$  où  $w$  est un nouveau contrôle. En déduire le bouclage de suivi de la trajectoire de référence  $(h_r, v_r)$ .

## Oscillateurs en parallèle et systèmes linéaires

Le système de 2 équations à 3 variables  $(x_1, x_2, u)$  ( $a_1, a_2 > 0$  et  $a_1 \neq a_2$ )

$$\frac{d^2}{dt^2}x_1 = -a_1(x_1 - u), \quad \frac{d^2}{dt^2}x_2 = -a_2(x_2 - u)$$

définit une **module libre** de base  $y = \frac{a_2x_1 - a_1x_2}{a_2 - a_1}$  :

$$\begin{cases} x_1 = y + \frac{d^2}{dt^2}y/a_2, & \frac{d}{dt}x_1 = \frac{d}{dt}y + \frac{d^3y}{dt^3}/a_2 \\ x_2 = y + \frac{d^2}{dt^2}y/a_1, & \frac{d}{dt}x_2 = \frac{d}{dt}y + \frac{d^3y}{dt^3}/a_1 \\ u = y + \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) \frac{d^2}{dt^2}y + \left(\frac{1}{a_1a_2}\right) \frac{d^4}{dt^4}y \end{cases}$$

Trajectoire de référence allant de l'équilibre  $x_1 = x_2 = u = 0$  en  $t = 0$  à l'équilibre  $x_1 = x_2 = u = D$  en  $t = T > 0$  :

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ \frac{(t)^4}{t^4 + (T - t)^4} D & \text{si } t \in [0, T], \\ D & \text{si } t \geq T. \end{cases}$$

**Exo:** Généraliser ce calcul pour  $n$  oscillateurs en parallèle,

$$\frac{d^2}{dt^2}x_i = -a_i(x_i - u), \quad i = 1, \dots, n \quad (a_i > 0 \text{ et } a_i \neq a_j \text{ si } i \neq j).$$

## Systèmes plats : une définition élémentaire (FLMR, 1992,...,1999)

Le système explicite d'état

$$\frac{d}{dt}x = f(x, u)$$

est plat, ssi, il existe  $m = \dim(u)$  fonctions de sortie  $y = h(x, u, \dots, u^{(p)})$ ,  $\dim(h) = \dim(u)$ , telle que l'**inverse du système**  $u \mapsto y$  soit sans dynamique. Cela signifie simplement que la solution de

$$\frac{d}{dt}x = f(x, u), \quad y = h(x, u, \dots, u^{(p)})$$

où  $t \mapsto y(t)$  est la donnée et  $(x, u)$  est l'inconnue s'écrit

$$x = \Lambda(y, \dot{y}, \dots, y^{(q)}), \quad u = \Upsilon(y, \dot{y}, \dots, y^{(q+1)}).$$

La sortie  $y$  est appelée **sortie plate**.

**Exo:** Montrer que le robot "E=M6"

$$\frac{d}{dt}x_1 = \frac{u_1 + u_2}{2} \cos x_3, \quad \frac{d}{dt}x_2 = \frac{u_1 + u_2}{2} \sin x_3, \quad \frac{d}{dt}x_3 = \frac{u_2 - u_1}{p}$$

admet  $(x_1, x_2)$  comme sortie plate ( $p >$  est une longueur).

## Inversion et algorithme de structure

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}x_1 = x_1x_2 + u_1 \\ \frac{d}{dt}x_2 = x_1x_2 + x_3 + u_1 \\ \frac{d}{dt}x_3 = x_3 + x_4 + u_2 \\ \frac{d}{dt}x_4 = x_3x_4 + \lambda x_4 + u_2 \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{array} \right.$$

Inversion du système  $\frac{d}{dt}x = f(x, u)$  et  $y = h(x)$  avec  $\dim y = \dim u$  ( $u$  est l'entrée et  $y$  la sortie).

On suppose  $t \mapsto y(t)$  **donné**. On cherche à calculer  $x$  et  $u$ . Le **principe** : les dérivées successives de  $y(t) = h(x)$  donnent des équations reliant  $x$  et  $u$ .

## Le critère des variétés réglées (R.1994)

Si on élimine  $u$  des  $n = \dim x$  équations d'état  $\frac{d}{dt}x = f(x, u)$  on obtient un système sous-déterminé de  $n - m$  équations différentielles et  $n$  inconnues  $x$  (**système implicite sous-déterminé**) :  $F(x, \frac{d}{dt}x) = 0$ .

**Critère des variétés réglées** : si  $F(x, \frac{d}{dt}x) = 0$  est plat, alors pour tout  $(x, p)$  tel que  $F(x, p) = 0$ , existe  $a \neq 0$  tel que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $F(x, p + \lambda a) = 0$ .

Caractérisation **pour  $\dim F = \dim x - 1$**  (système à un seul contrôle) : la CNS de linéarisation par bouclage statique (les seules variétés réglées de dimension 1 sont des droites).

**Exo**: Sous quelle(s) condition(s) sur le paramètre  $\alpha$ , le système

$$\frac{d}{dt}x_1 = u_1, \quad \frac{d}{dt}x_2 = u_2, \quad \frac{d}{dt}x_3 = (u_1)^2 - \alpha (u_2)^2$$

vérifie-t-il le critère des variétés réglées. Quand ces conditions sont satisfaites, montrer que le système est alors effectivement plat en exhibant une sortie plate.

## Un peu d'histoire

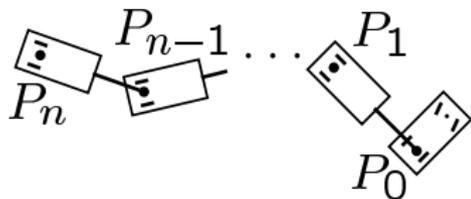
- ▶ Monge (1784) montre que la solution générale de l'équation du premier ordre (équation qui porte son nom)

$$\frac{dy}{dx} = F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}\right)$$

s'exprime via une fonction arbitraire d'une variable et de ses dérivées jusqu'à l'ordre 2. Monge dit que le système est **intégrable** bien qu'il soit **sous-déterminé**. **Exemple** :  $\frac{dy}{dx} = x \frac{dz}{dx}$  avec  $y = w(z)$  et  $x = w'(z)$ .

- ▶ Hilbert (1912) se demandait si la solution générale de l'équation de Monge du second ordre  $\frac{d^2y}{dx^2} = F\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right)$  **s'exprime sans intégrale** comme celle de l'équation du premier ordre. Il montre qu'en général ce n'est pas le cas et que ce problème est lié à la **classification des systèmes sous-déterminés via un groupe de transformations inversibles et sans intégrale**. Il propose une analogie suggestive avec la classification des variétés algébriques via le groupe des transformations bi-rationnelles.

## Véhicule à $n$ remorques



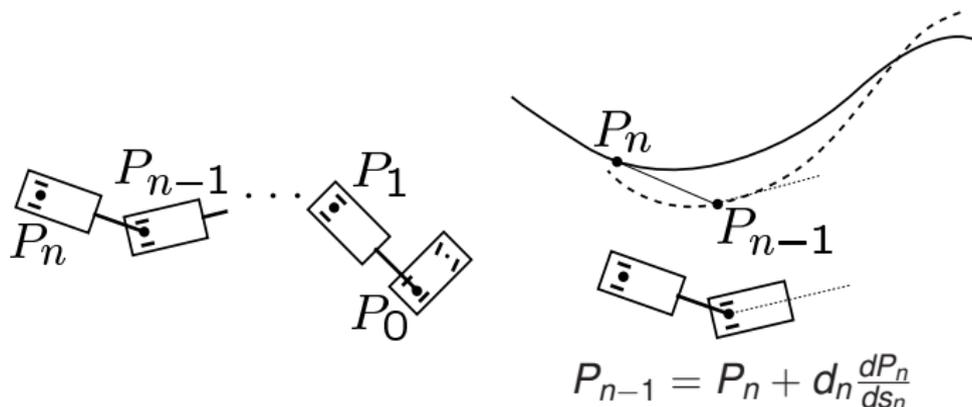
- ▶ **Roulement sans glissement** : la vitesse de chaque  $P_i$  est parallèle à la direction  $\theta_i$  de la remorque  $i$  de longueur  $d_i > 0$ .
- ▶  $P_0$  de coordonnées cartésiennes  $(x_0, y_0)$  ; les deux contrôles scalaires sont  $v$  la vitesse et  $\phi$  l'angle de braquage.

$$\frac{d}{dt}x_0 = v \cos \theta_0, \quad \frac{d}{dt}y_0 = v \sin \theta_0, \quad \frac{d}{dt}\theta_0 = \frac{v}{d_0} \tan \phi = \omega$$

$$\frac{d}{dt}\theta_i = \frac{v}{d_i} \left( \prod_{j=1}^{i-1} \cos(\theta_{j-1} - \theta_j) \right) \sin(\theta_{i-1} - \theta_i) \quad (i = 1, \dots, n),$$

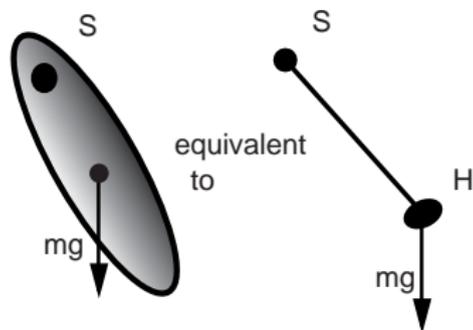
**Sortie plate** :  $P_n$  ; preuve uniquement avec un dessin et les formules de Frénet.

## La construction géométrique



- ▶ **Invariance** par rapport au groupe  $SE(2)$ .
- ▶ Sortie plate non unique :  $(\xi = x_n, \zeta = y_n + \frac{d}{dt}x_n)$  est **une autre sortie plate** car  $x_n = \xi$  et  $y_n = \zeta - \frac{d}{dt}\xi$ .
- ▶ La sortie plate  $(x_n, y_n)$  formée par les coordonnées cartésiennes de  $P_n$  est **plus naturelle** que  $(\xi, \zeta)$ . Elle repose sur une fonction de sortie  $h$  **équivariante**.

## Le robot jongleur $2k\pi$ : prototype de systèmes implicites et plats



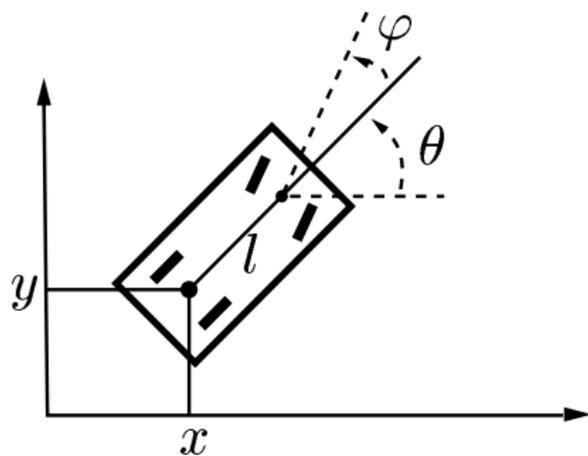
Dynamique du pendule ponctuel  $H$   
isochrone de Huygens :

$$\begin{aligned}m \frac{d^2}{dt^2} H &= \vec{T} + m\vec{g} \\ \vec{T} & // \vec{HS} \\ \|\vec{HS}\|^2 &= l\end{aligned}$$

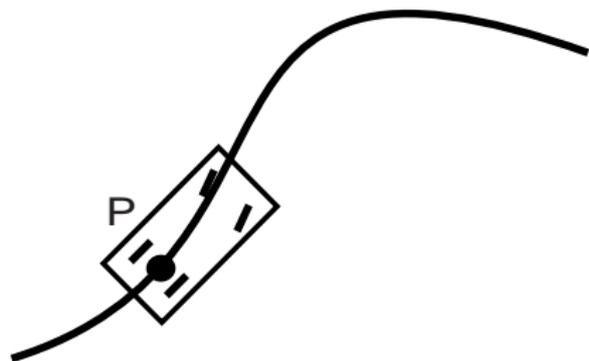
- ▶ Le point de suspension  $S \in \mathbb{R}^3$  est le contrôle
- ▶ Le **centre d'oscillation**  $H \in \mathbb{R}^3$  est la sortie plate : comme  $\vec{T}/m = \frac{d^2}{dt^2} H - \vec{g}$  et  $\vec{T} // \vec{HS}$ ,  $S$  est solution du système algébrique suivant :

$$\vec{HS} // \frac{d^2}{dt^2} H - \vec{g} \quad \text{et} \quad \|\vec{HS}\|^2 = l.$$

# Cinématique de la voiture



$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = v \cos \theta \\ \frac{d}{dt}y = v \sin \theta \\ \frac{d}{dt}\theta = \frac{v}{l} \tan \varphi = \omega \end{cases}$$



$$\begin{cases} v = \pm \left\| \frac{d}{dt}P \right\| \\ \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} = \frac{\frac{d}{dt}P}{v} \\ \tan \varphi = \frac{l \det(\ddot{P}, \dot{P})}{v \sqrt{|v|}} \end{cases}$$

## Symétrie par changement d'échelle de temps

Pour tout changement d'échelle de temps  $T \mapsto \sigma(T)$ , la transformation

$$t = \sigma(T), \quad (x, y, \theta) = (X, Y, \Theta), \quad (v, \omega) = (V, \Omega)/\sigma'(T)$$

laisse les équations

$$\frac{d}{dt}x = v \cos \theta, \quad \frac{d}{dt}y = v \sin \theta, \quad \frac{d}{dt}\theta = \omega$$

inchangées :

$$\frac{d}{dT}X = V \cos \Theta, \quad \frac{d}{dT}Y = V \sin \Theta, \quad \frac{d}{dT}\Theta = \Omega.$$

Prototype d'**invariance d'un système par rapport à un groupe de transformations.**

## Le groupe des déplacements du plan $SE(2)$ , comme groupe de symétries

Pour tout  $(a, b, \alpha)$ , la transformation

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \cos \alpha - Y \sin \alpha + a \\ X \sin \alpha + Y \cos \alpha + b \end{bmatrix}, \quad \theta = \Theta - \alpha, \quad (v, \omega) = (V, \Omega)$$

laisse les équations

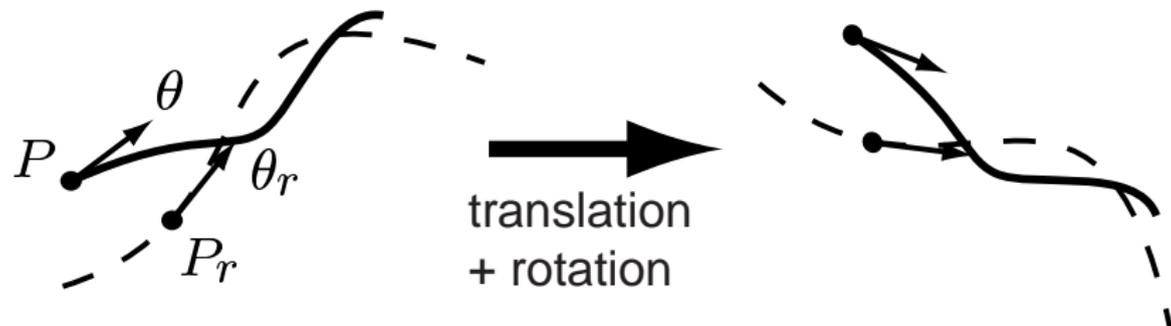
$$\frac{d}{dt}x = v \cos \theta, \quad \frac{d}{dt}y = v \sin \theta, \quad \frac{d}{dt}\theta = \omega$$

inchangées :

$$\frac{d}{dt}X = V \cos \Theta, \quad \frac{d}{dt}Y = V \sin \Theta, \quad \frac{d}{dt}\Theta = \Omega.$$

**Il faut que notre méthode de contrôle préserve cette invariance.**

## Le suivi de trajectoire invariant



Le **contrôleur ne doit pas dépendre des origines prises pour les positions et pour l'orientation** : la dynamique par rapport à la trajectoires de référence doit être indépendante de ce choix d'origines.

## Construction du suivi invariant

**Soit** une trajectoire de référence décrite ainsi ( $s_r$  est l'abscisse curviligne)

$$t \mapsto s_r \mapsto P_r(s_r), \quad \theta_r(s_r), \quad v_r = \frac{d}{dt}s_r, \quad \omega_r = \frac{d}{dt}s_r \kappa_r(s_r)$$

et l'état actuel de la voiture  $(P, \theta)$

**Trouver** des corrections invariantes

$$v = v_r + \dots, \quad \omega = \omega_r + \dots$$

de sorte que  $P \mapsto P_r$  quand  $t$  augmente.

## Invariance par changement d'échelle de temps

On pose

$$v = \bar{v} \frac{d}{dt} s_r, \quad \omega = \bar{\omega} \frac{d}{dt} s_r$$

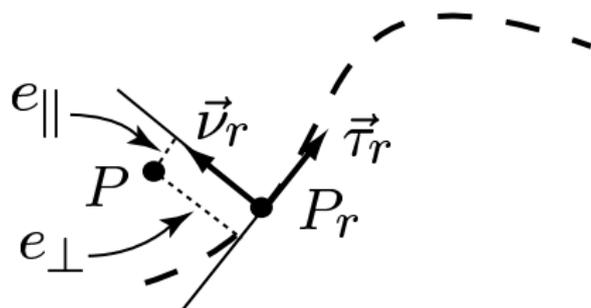
avec ' pour la dérivée par rapport à  $s_r$ .

Les équations restent les mêmes

$$P' = \bar{v} \vec{\tau}, \quad \vec{\tau}' = \bar{\omega} \vec{\nu}$$

avec  $P = (x, y)$ ,  $\vec{\tau} = (\cos \theta, \sin \theta)$  et  $\vec{\nu} = (-\sin \theta, \cos \theta)$ .

## Les erreurs invariantes



On construit le bouclage de suivi en utilisant des techniques de découplage entrée/sortie avec comme sorties les **deux erreurs suivantes** :

$$e_{\parallel} = (P - P_r) \cdot \vec{\tau}_r, \quad e_{\perp} = (P - P_r) \cdot \vec{v}_r$$

et comme les entrées  $\bar{v}$  et  $\bar{\omega}$ .

## Calcul des dérivées de $e_{\parallel}$ et $e_{\perp}$

Comme  $e_{\parallel} = (P - P_r) \cdot \vec{\tau}_r$  et  $e_{\perp} = (P - P_r) \cdot \vec{\nu}_r$  on a (avec  $' = d/ds_r$ )

$$e'_{\parallel} = (P' - P'_r) \cdot \vec{\tau}_r + (P - P_r) \cdot \vec{\tau}'_r.$$

Mais  $P' = \bar{v}\vec{\tau}$ ,  $P'_r = \vec{\tau}_r$  et  $\vec{\tau}'_r = \kappa_r\vec{\nu}_r$ , donc

$$e'_{\parallel} = \bar{v}\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}_r - 1 + \kappa_r(P - P_r) \cdot \vec{\nu}_r.$$

De même pour  $e'_{\perp}$  on a :

$$e'_{\parallel} = \bar{v} \cos(\theta - \theta_r) - 1 + \kappa_r e_{\perp}, \quad e'_{\perp} = \bar{v} \sin(\theta - \theta_r) - \kappa_r e_{\parallel}.$$

Calcul approché pour  $e_{\parallel}$  avec  $\theta \approx \theta_r$

Comme  $e'_{\parallel} \approx \bar{v} - 1 + \kappa_r e_{\perp}$ , le bouclage  $\bar{v} = 1 - \kappa_r e_{\perp} - e_{\parallel}/L_{\parallel}$  avec  $L_{\parallel}$  le gain qui est ici une longueur à choisir du même ordre que celle de la voiture, conduit, pour  $e_{\parallel}$  à une **dynamique exponentiellement stable en boucle fermée** :

$$e'_{\parallel} = -e_{\parallel}/L_{\parallel}$$

Calcul approché pour  $e_{\perp}$  avec  $\theta \approx \theta_r$ ,  $e_{\parallel} \approx 0$  et  $\bar{v} \approx 1$

Comme  $e'_{\perp} \approx (\theta - \theta_r)$ , il faut dériver une fois de plus pour voir apparaître l'autre contrôle  $\bar{\omega} = \theta'$ . **A des termes d'ordre 2 près**, on a donc

$$e''_{\perp} \approx (\bar{\omega} - \bar{\omega}_r)$$

Alors le bouclage (les gains  $\xi$  et  $1/\varpi$  sont autour de 1 et de la dimension de la voiture)

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_r - 2\xi\varpi e'_{\perp} - \varpi^2 e_{\perp}$$

assure une **dynamique du second ordre linéaire et exponentiellement stable** pour  $e_{\perp}$

$$e''_{\perp} = -2\xi\varpi e'_{\perp} - \varpi^2 e_{\perp}$$

## Les calculs rigoureux

La dérivation de

$$\mathbf{e}'_{\parallel} = \bar{v} \cos(\theta - \theta_r) - 1 + \kappa_r \mathbf{e}_{\perp}, \quad \mathbf{e}'_{\perp} = \bar{v} \sin(\theta - \theta_r) - \kappa_r \mathbf{e}_{\parallel}$$

par rapport à  $s_r$  donne

$$\begin{aligned} \mathbf{e}''_{\parallel} &= \bar{v}' \cos(\theta - \theta_r) - \bar{\omega} \bar{v} \sin(\theta - \theta_r) \\ &\quad + 2\kappa_r \bar{v} \sin(\theta - \theta_r) + \kappa'_r \mathbf{e}_{\perp} - \kappa_r^2 \mathbf{e}_{\parallel} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}''_{\perp} &= \bar{v}' \sin(\theta - \theta_r) + \bar{\omega} \bar{v} \cos(\theta - \theta_r) \\ &\quad - 2\kappa_r \bar{v} \cos(\theta - \theta_r) - \kappa'_r \mathbf{e}_{\parallel} + \kappa_r + \kappa_r^2 \mathbf{e}_{\parallel}. \end{aligned}$$

## Le feedback dynamique en échelle $s_r$

On a

$$\begin{aligned}e''_{\parallel} &= \bar{v}' \cos(\theta - \theta_r) - \bar{\omega} \bar{v} \sin(\theta - \theta_r) + W_{\parallel} \\e''_{\perp} &= \bar{v}' \sin(\theta - \theta_r) + \bar{\omega} \bar{v} \cos(\theta - \theta_r) + W_{\perp}\end{aligned}$$

On choisit  $\bar{v}'$  et  $\bar{\omega}$  de sorte que

$$\begin{aligned}e''_{\parallel} &= -\left(\frac{1}{L_{\parallel}^1} + \frac{1}{L_{\parallel}^2}\right) e'_{\parallel} - \left(\frac{1}{L_{\parallel}^1 L_{\parallel}^2}\right) e_{\parallel} \\e''_{\perp} &= -\left(\frac{1}{L_{\perp}^1} + \frac{1}{L_{\perp}^2}\right) e'_{\perp} - \left(\frac{1}{L_{\perp}^1 L_{\perp}^2}\right) e_{\perp}\end{aligned}$$

C'est possible pour une large plage autour de la trajectoire de référence car  $\bar{v} \approx 1$ .

## Le feedback dynamique en échelle $t$

En échelle  $s_r$  on a

$$\bar{v}' = \Phi(\bar{v}, P, P_r, \theta, \theta_r, \kappa_r, \kappa_r')$$

$$\bar{\omega} = \Psi(\bar{v}, P, P_r, \theta, \theta_r, \kappa_r, \kappa_r')$$

Comme  $' = d/ds_r = d/(\frac{d}{dt}s_r dt)$  on a

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \Phi(\bar{v}, P, P_r, \theta, \theta_r, \kappa_r, \kappa_r') \dot{s}_r(t)$$

$$\bar{\omega} = \Psi(\bar{v}, P, P_r, \theta, \theta_r, \kappa_r, \kappa_r')$$

avec

$$v = \bar{v} \frac{d}{dt} s_r(t), \quad \tan \phi = \frac{l\bar{\omega}}{\bar{v}}$$

Rien n'explose pour  $\frac{d}{dt} s_r(t)$  proche de 0 : une utilisation de l'invariance par échelle de temps.

## Références utiles

- ▶ *EDO, systèmes plans, et régulateurs (très pédagogique et pourtant d'un excellent niveau)* A. Andronov, S. Khaikin and A. Vitt : Theory of Oscillators. Dover (English Translation), 1987.
- ▶ *la BD des systèmes dynamiques en 4 volumes (que des portraits de phases et des dessins)* : R.H. Abraham and C.D. Shaw. Dynamics – The Geometry of Behavior : I-IV. Aerial Press, Santa Cruz, California, 1981.
- ▶ *Systèmes dynamiques (très bonne introduction aux EDO)* V. Arnold : Equations différentielles ordinaires. Mir Moscou, 1974.
- ▶ *Bifurcation et théorie de perturbation et KAM (très avancé)* V. Arnold : Chapitres Supplémentaires de la Théorie des Equations Différentielles Ordinaires. Mir Moscou, 1980.
- ▶ *Idem ci-dessus* : J. Guckenheimer and P. Holmes : Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. Springer, New York, 1983.
- ▶ *Contrôle non linéaire, Lyapounov et Robotique* : J. Slotine et J. Li : Applied Nonlinear Control. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1991.
- ▶ *Contrôle non linéaire (une partie importante sur les EDO, la stabilité et les systèmes lents/rapides)* : H. Khalil : Nonlinear Systems. MacMillan, 1992.

## Références utiles (suite et fin)

- ▶ *Equations de Lagrange* L. Landau, E. Lifchitz : Physique théorique : Mécanique, tome I. Mir-Moscou, 1964.
- ▶ *em Systèmes linéaires et formes de Brunovsky* F. Bonnans et P. Rouchon : Commande et optimisation de systèmes dynamiques. 2005.
- ▶ *Systèmes différentiellements plats (dimension finie et infinie)* : Ph. Martin et P. Rouchon : Systèmes plats, planification et suivi de trajectoires, Notes, Journées X-UPS, 1999. Cours téléchargeable à l'adresse : <http://math.polytechnique.fr/xups/vol99.html>
- ▶ *Livre de base en mécanique quantique* : C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë. Mécanique Quantique. Hermann, Paris 1977 (vol I & II).
- ▶ *Un livre plus avancé mais très pédagogique* : S. Haroche, J-M Raimond. Exploring the quantum : atoms, cavities and photons. Oxford University Press (Graduate texts), 2006.
- ▶ *Sur le contrôle pour les systèmes quantiques* : P. Rouchon : Quantum Systems and Control. Arima. Vol. 9, pp : 325-357, 2008.
- ▶ *Sur la page web* <http://cas.ensmp.fr/~rouchon/index.html> on trouvera pour ce cours des documents à télé-charger.